

**laboratorio central
de ensayo
de materiales
de construcción**

publicación n.º 197

**Una aplicación de los métodos matriciales
al cálculo de puentes**

Avelino Samartín Quiroga
Dr. Ing. de Caminos. Lic. en Ciencias Matemáticas

Depósito Legal : M. - 8.924 - 1968

Tipografía Artística. Alameda, 12.-Madrid

I N D I C E

1. Introducción	5
2. Estudio de la losa	7
2.1. <i>Placa</i>	7
2.2. <i>Laja</i>	15
3. Estudio de la viga	20
4. Transformación de coordenadas	23
5. Matriz de rigidez de la losa en ejes generales	26
6. Planteamiento de las ecuaciones modales. Matriz de rigidez de la estructura	27
7. Solución final	31
7.1. <i>Vigas</i>	31
7.2. <i>Losas</i>	32
8. Matriz de transferencia de la losa en ejes generales	33
9. Planteamiento de las ecuaciones de transferencia. Matriz de transferencia de la estructura	34
10. Métodos iterativos	36
11. Ejemplo de aplicación	40
Notación	53
Bibliografía	54

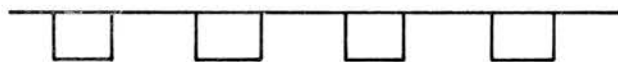
1. INTRODUCCION.

El campo de aplicación del análisis que a continuación se expone, comprende los tableros de puentes simplemente apoyados sin vigas transversales intermedias. En algunos de éstos se pueden distinguir dos elementos estructurales bien diferenciados: el elemento losa y la viga.

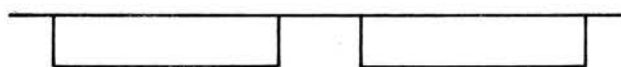
Las figuras 1 (a) y 1 (b) son dos típicos ejemplos en los que esta distinción es posible y se indica en las figuras 2 (a) y 2 (b), respectivamente.



(a)



(b)



(c)

Figura 1.

Sin embargo, en las vigas cajón de la figura 1 (c) no debe ignorarse su deformación transversal y un análisis del tipo de la figura 2 (b) no es válido, por lo que a veces se suele considerar el de la figura 2 (c).

A efectos de este estudio se considerará el tablero de un puente como un conjunto de losas y vigas arbitrariamente conectados.

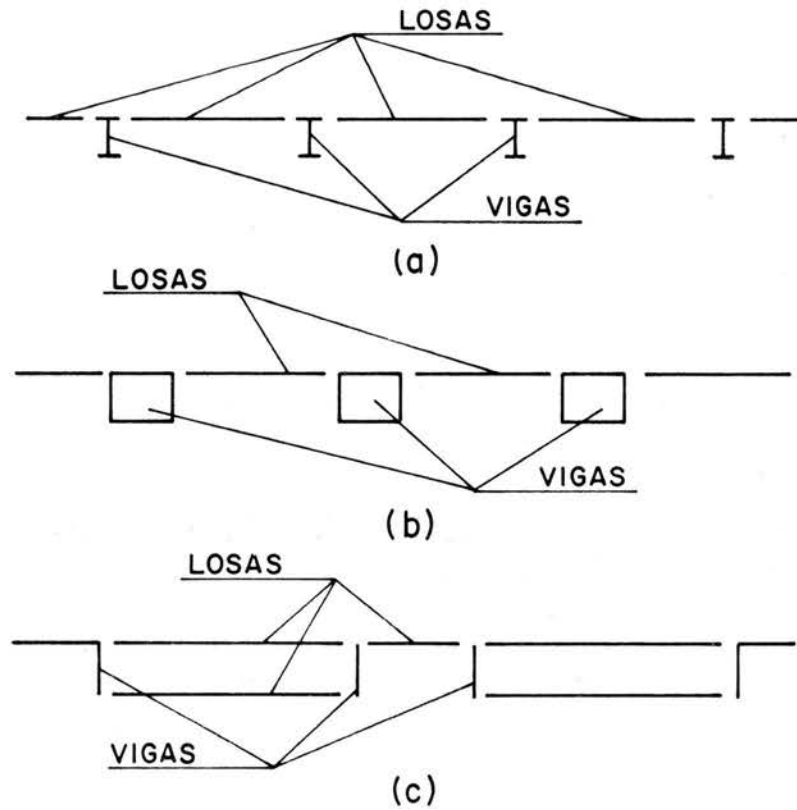


Figura 2.

Entre los distintos procesos matriciales de cálculo de estructuras se utilizarán el método de los desplazamientos o equilibrio (matriz de rigidez) por su facilidad de automatización y el método de la matriz de transferencia, por manejar matrices de dimensión mínima, expuestos, por ejemplo, en (I). Este último análisis está relacionado con el método de progresión matricial desarrollado por Tottenham en (II).

Se presenta como complemento una generalización del método de Cross.

2. ESTUDIO DE LA LOSA.

Dos grupos de esfuerzos y desplazamientos son considerados: 1.º El grupo flector (tipo placa). 2.º El grupo tangencial o membrana (tipo laja).

2.1. PLACA.

La ecuación general de la placa homogénea e isotrópica es:

$$\nabla^4 w = \frac{Z}{D}$$

o bien, desarrollando:

$$w_{,1111} + 2 w_{,1122} + w_{,2222} = \frac{Z}{D} \quad (1)$$

Las expresiones de los esfuerzos son:

$$\left. \begin{aligned} m_{11} &= -D (w_{,11} + \nu w_{,22}) \\ m_{22} &= -D (w_{,22} + \nu w_{,11}) \\ m_{12} &= -D (1 - \nu) w_{,12} = m_{21} \\ q_1 &= -D (w_{,111} + w_{,122}) \\ q_2 &= -D (w_{,222} + w_{,112}) \\ r_1 &= q_1 + m_{12,2} = -D [w_{,111} + (2 - \nu) w_{,122}] \\ r_2 &= q_2 + m_{21,1} = -D [w_{,222} + (2 - \nu) w_{,112}] \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Los signos positivos de los esfuerzos están representados en las figuras 3 y 4. La flecha w y la fuerza exterior Z son positivas si coinciden con la dirección del eje z .

Las condiciones a lo largo de los bordes $x_1 = 0$ y $x_1 = l_1$ corresponden a las de simple apoyo, es decir:

$$w = 0 \quad \text{y} \quad m_{11} = 0 \quad (3)$$

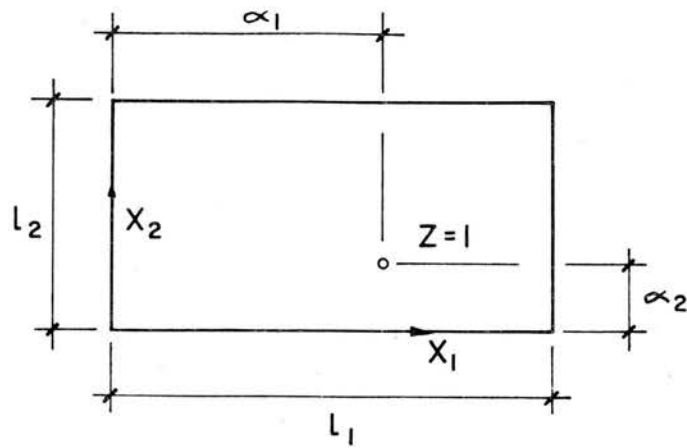


Figura 3.

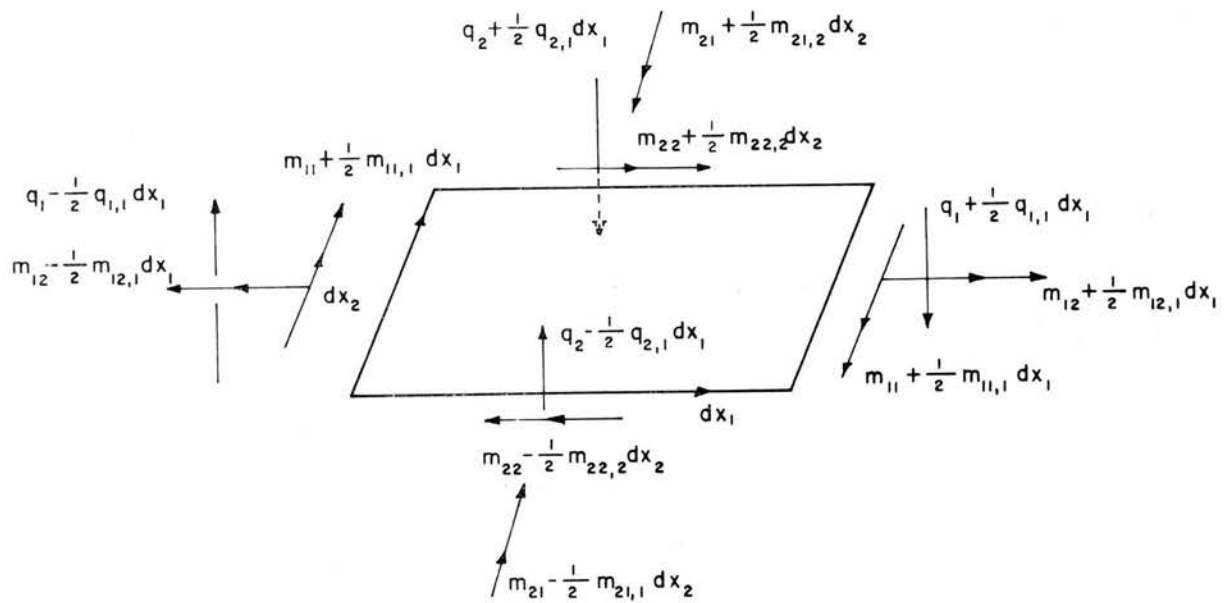


Figura 4.

2.1.1. Solución complementaria.

Es la solución de (1) con el segundo miembro igual a cero y puede ponerse en la forma tipo Levy, que satisface a (3) :

$$w = w(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x_2) \operatorname{sen} \lambda_n x_1$$

con:

$$\lambda_n = \frac{n \pi}{l_1} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Un estudio sobre este tipo de solución correspondiente a un caso más general puede verse en (III), por lo que sólo se expone aquí los resultados más importantes.

Considerando el armónico n-simo y suprimiendo por simplicidad de escritura el subíndice n, se comprueba que $F(x_2)$ y sus derivadas vienen dadas por la expresión:

$$\frac{d^k F(x_2)}{d x_2^k} = \mathbf{B}^{(k)} \mathbf{P}(x_2) \mathbf{a}_{12} + \mathbf{C}^{(k)} \mathbf{P}(y_2) \mathbf{a}_{34} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

En donde:

$\mathbf{B}^{(k)} = (-1)^k [\lambda^k, -k \lambda^{k-1}]$	dimensión	(1×2)
$\mathbf{C}^{(k)} = (-1)^k \mathbf{B}^{(k)} = [\lambda^k, -k \lambda^{k-1}]$	»	(1×2)
$\mathbf{P}(x_2) = \begin{bmatrix} e^{-\lambda x_2} & x_2 e^{-\lambda x_2} \\ & e^{-\lambda x_2} \end{bmatrix}$	»	(2×2)
$\mathbf{a}_{12} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$	»	(2×1)
$\mathbf{a}_{34} = \begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$	»	(2×1)
$y_2 = l_2 - x_2$		

a_1, a_2, a_3 y a_4 son constantes arbitrarias.

Se define el vector resultante \mathbf{R}_f como:

$$\mathbf{R}_f = \text{vector columna } (w; w_{,1}; -w_2; m_{11}; m_{22}; m_{12}; q_1; q_2; r_1; r_2) \quad \text{dimensión } (10 \times 1)$$

Los valores de $w_{,1}$, m_{12} , q_1 y r_1 varían a lo largo de x_1 , como $\cos \lambda x_1$ y los restantes esfuerzos y desplazamientos, como $\operatorname{sen} \lambda x_1$. Los elementos de \mathbf{R}_f son las amplitudes de estas funciones.

Teniendo en cuenta (2), \mathbf{R}_f toma, en el caso de la solución complementaria, la siguiente forma:

$$\mathbf{R}_f^c = \mathbf{G}_f [\mathbf{B} \mathbf{P}(x_2) \cdot \mathbf{a}_{12} + \mathbf{C} \mathbf{P}(y_2) \mathbf{a}_{31}]$$

con $\mathbf{G}_f = \begin{bmatrix} 1 & . & . & . \\ \lambda & . & . & . \\ . & -1 & . & . \\ \lambda^2 D & . & -\nu D & . \\ \nu \lambda^2 D & . & -D & . \\ . & -(1-\nu) \lambda D & . & . \\ \lambda^3 D & . & -\lambda D & . \\ . & \lambda^2 D & . & -D \\ \lambda^3 D & . & -(2-\nu) \lambda D & . \\ . & +(2-\nu) \lambda^2 D & . & -D \end{bmatrix}$ dimensión (10×4)

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{(0)} \\ \mathbf{B}^{(1)} \\ \mathbf{B}^{(2)} \\ \mathbf{B}^{(3)} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{(0)} \\ \mathbf{C}^{(1)} \\ \mathbf{C}^{(2)} \\ \mathbf{C}^{(3)} \end{bmatrix}$$
 dimensión (4×2)

Es conveniente, al plantear las condiciones a lo largo de los bordes $x_2 = 0$ y $x_2 = l_2$, la consideración de las dos submatrices de \mathbf{R}_f :

$$\mathbf{d}_f = \begin{bmatrix} w \\ -w, 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{p}_f = \begin{bmatrix} r_2 \\ m_{22} \end{bmatrix}$$

Que toman la forma siguiente para la solución complementaria:

$$\mathbf{d}_f^c = \mathbf{G}_f^d [\mathbf{B} \mathbf{P}(x_2) \mathbf{a}_{12} + \mathbf{C} \mathbf{P}(y_2) \mathbf{a}_{31}]$$

$$\mathbf{p}_f^c = \mathbf{G}_f^p [\mathbf{B} \mathbf{P}(x_2) \mathbf{a}_{12} + \mathbf{C} \mathbf{P}(y_2) \mathbf{a}_{31}]$$

en donde \mathbf{G}_f^d y \mathbf{G}_f^p de dimensión (2×4) son las correspondientes submatrices de \mathbf{G}_f .

Los valores de \mathbf{d}_f y \mathbf{p}_f en $x_2 = 0$ y $x_2 = l_2$ se designan por \mathbf{d}_{f0} , \mathbf{d}_{f1} , \mathbf{p}_{f0} y \mathbf{p}_{f1} , respectivamente, es decir:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{d}_{f0} &= \mathbf{G}_f^d [\mathbf{B} \mathbf{a}_{12} + \mathbf{C} \mathbf{P}(l_2) \mathbf{a}_{31}] \\ \mathbf{p}_{f0} &= \mathbf{G}_f^p [\mathbf{B} \mathbf{a}_{12} + \mathbf{C} \mathbf{P}(l_2) \mathbf{a}_{31}] \\ \mathbf{d}_{f1} &= \mathbf{G}_f^d [\mathbf{B} \mathbf{P}(l_2) \mathbf{a}_{12} + \mathbf{C} \mathbf{a}_{31}] \\ \mathbf{p}_{f1} &= \mathbf{G}_f^p [\mathbf{B} \mathbf{P}(l_2) \mathbf{a}_{12} + \mathbf{C} \mathbf{a}_{31}] \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

2.1.2. Matriz de rigidez.

La matriz de rigidez en ejes locales del elemento placa se deduce a partir de (4), eliminando \mathbf{a}_{12} y \mathbf{a}_{34} , con lo que se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_{f1} \\ \mathbf{p}_{f0} \end{bmatrix} = \mathbf{k}_f \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{f1} \\ \mathbf{d}_{f0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{f11} & \mathbf{k}_{f10} \\ \mathbf{k}_{f01} & \mathbf{k}_{f00} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{f1} \\ \mathbf{d}_{f0} \end{bmatrix} \quad (5)$$

en donde la matriz de rigidez \mathbf{k}_f viene dada por la expresión:

$$\mathbf{k}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_f^p \mathbf{B} \mathbf{P}(l_2) & \mathbf{G}_f^p \mathbf{C} \\ \mathbf{G}_f^p \mathbf{B} & \mathbf{G}_f^p \mathbf{C} \mathbf{P}(l_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_f^d \mathbf{B} \mathbf{P}(l_2) & \mathbf{G}_f^d \mathbf{C} \\ \mathbf{G}_f^d \mathbf{B} & \mathbf{G}_f^d \mathbf{C} \mathbf{P}(l_2) \end{bmatrix}^{-1}$$

2.1.3. Matriz de transferencia.

Análogamente, el apartado anterior y con respecto a los mismos ejes, se tiene:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_{f1} \\ \mathbf{d}_{f1} \end{bmatrix} = \mathbf{t}_f \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{f0} \\ \mathbf{d}_{f0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{f11} & \mathbf{t}_{f12} \\ \mathbf{t}_{f21} & \mathbf{t}_{f22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{f0} \\ \mathbf{d}_{f0} \end{bmatrix}$$

con:

$$\mathbf{t}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_f^p \mathbf{B} \mathbf{P}(l_2) & \mathbf{G}_f^p \mathbf{C} \\ \mathbf{G}_f^d \mathbf{B} \mathbf{P}(l_2) & \mathbf{G}_f^d \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_f^p \mathbf{B} & \mathbf{G}_f^p \mathbf{C} \mathbf{P}(l_2) \\ \mathbf{G}_f^d \mathbf{B} & \mathbf{G}_f^d \mathbf{C} \mathbf{P}(l_2) \end{bmatrix}^{-1}$$

2.1.4. Solución particular.

2.1.4.1. Carga puntual.

Se considera el caso de carga puntual actuando en el punto (α_1, α_2) de la placa, es decir:

$$Z = Z_0 \delta(x_1 - \alpha_1, x_2 - \alpha_2) = Z_0 \delta(x_1 - \alpha_1) \delta(x_2 - \alpha_2)$$

en donde δ representa la distribución delta de Dirac.

Designando a una solución particular de (1) por w^0 , se puede poner:

$$w^0 = w^0(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n^0(x_1) \sin \lambda_n x_2$$

Suprimiendo el subíndice n como anteriormente y considerando el armónico n -simo, la ecuación (1) se transforma en:

$$F_{,2222}^0 - 2\lambda^2 F_{,22}^0 + \lambda^4 F^0 = Z_0 \frac{2}{l_1} \frac{\sin \lambda a_1}{D} \delta(x_2 - a_2)$$

Las condiciones de borde que se imponen a $F^0(x_2)$ son las de una placa de longitud l_2 infinita, o sea:

- 1.º $F^0(x_2) = 0$ cuando $|x_2| \rightarrow \infty$.
- 2.º $F_{,2}^0(x_2) = 0$ para $x_2 = a_2$.
- 3.º $F_{,222}^0(x_2) = \pm \frac{\sin \lambda a_1}{l_1 D} Z_0$ para $x_2 = a_2 \pm \varepsilon$, respectivamente, y $\varepsilon \rightarrow +0$.

De donde se deduce que:

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dx_2^k} F^0(x_2) &= \mathbf{B}^{(k)} \mathbf{P}(x_2 - a_2) \mathbf{a}_{12}^0 & \text{si } x_2 \geq a_2 \\ \frac{d^k}{dx_2^k} F^0(x_2) &= \mathbf{C}^{(k)} \mathbf{P}(a_2 - x_2) \mathbf{a}_{34}^0 & \text{si } x_2 \leq a_2 \end{aligned}$$

con

$$\mathbf{a}_{12}^0 = \mathbf{a}_{34}^0 = \mathbf{a}^0 = \frac{Z_0}{2\lambda^3} \frac{\sin \lambda a_1}{l_1 D} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix}$$

y \mathbf{R}_f toma la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_f^0 &= \mathbf{G}_f \mathbf{B} \mathbf{P}(x_2 - a_2) \mathbf{a}^0 & \text{si } x_2 \geq a_2 \\ \mathbf{R}_f^0 &= \mathbf{G}_f \mathbf{C} \mathbf{P}(a_2 - x_2) \mathbf{a}^0 & \text{si } x_2 \leq a_2 \end{aligned}$$

De manera análoga al apartado 2.1.1, se define y calculan \mathbf{d}_{f0}^0 , \mathbf{d}_{f1}^0 , \mathbf{p}_{f0}^0 y \mathbf{p}_{f1}^0 , obteniéndose:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{f0}^0 &= \mathbf{G}_f^d \mathbf{C} \mathbf{P}(a_2) \mathbf{a}^0 & \mathbf{p}_{f0}^0 &= \mathbf{G}_f^p \mathbf{C} \mathbf{P}(a_2) \mathbf{a}^0 \\ \mathbf{d}_{f1}^0 &= \mathbf{G}_f^d \mathbf{B} \mathbf{P}(l_2 - a_2) \mathbf{a}^0 & \mathbf{p}_{f1}^0 &= \mathbf{G}_f^p \mathbf{B} \mathbf{P}(l_2 - a_2) \mathbf{a}^0 \end{aligned}$$

2.1.4.2. Carga repartida sobre un rectángulo de lados m_1 y m_2 y centro en (a_1, a_2) .

La carga puede ser representada en este caso como:

$$Z = Z_0 K(x_1, a_1, m_1) \cdot K(x_2, a_2, m_2)$$

siendo la función $K(x_i, \alpha_i, m_i)$ ($i = 1, 2$) definida por:

$$K(x_i, \alpha_i, m_i) = \begin{cases} = 0 & \text{si } x_i \in \left(\alpha_i - \frac{m_i}{2}, \alpha_i + \frac{m_i}{2} \right) \\ = 1 & \text{si } x_i \in \left(\alpha_i - \frac{m_i}{2}, \alpha_i + \frac{m_i}{2} \right) \end{cases}$$

El desarrollo en serie de Fourier de $K(x_i, \alpha_i, m_i)$ es:

$$\begin{aligned} K(x_i, \alpha_i, m_i) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{l_1} \int_{\alpha_i - \frac{m_i}{2}}^{\alpha_i + \frac{m_i}{2}} \sin \lambda x_i dx_i \right] \sin \lambda x_i = \\ &= \frac{4}{l_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \sin \lambda \alpha_i \sin \frac{\lambda m_i}{2} \sin \lambda x_i \end{aligned}$$

Análogamente al apartado 2.1.4.1, se obtiene:

$$F_{,2222}^0 - 2\lambda^2 F_{,22}^0 + \lambda^4 F^0 = \frac{4Z_0}{\lambda l_1 D} \sin \lambda \alpha_1 \sin \frac{\lambda m_1}{2} \cdot K(x_2, \alpha_2, m_2)$$

Aplicando el concepto de función de Green, obtenida en 2.1.4.1, se llega a los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} \frac{d^K F^0(x_2)}{dx_2^K} &= \mathbf{C}^{(K-1)} \left[\mathbf{P} \left(\alpha_2 - \frac{m_2}{2} - x_2 \right) - \mathbf{P} \left(\alpha_2 + \frac{m_2}{2} - x_2 \right) \right] \mathbf{a}^0 \quad \text{si } x_2 \leq \alpha_2 - \frac{m_2}{2} \\ \frac{d^K F^0(x_2)}{dx_2^K} &= \mathbf{B}^{(K-1)} \left[\mathbf{P} \left(x_2 + \frac{m_2}{2} - \alpha_2 \right) - \mathbf{P} \left(x_2 - \frac{m_2}{2} - \alpha_2 \right) \right] \mathbf{a}^0 \quad \text{si } x_2 \geq \alpha_2 + \frac{m_2}{2} \\ \frac{d^K F^{(0)}(x_2)}{dx_2^K} &= \mathbf{B}^{(K-1)} \left[-\mathbf{I}_2 + \mathbf{P} \left(x_2 - \alpha_2 + \frac{m_2}{2} \right) \right] \mathbf{a}^0 + \\ &+ \mathbf{C}^{(K-1)} \left[+\mathbf{I}_2 - \mathbf{P} \left(\alpha_2 - x_2 + \frac{m_2}{2} \right) \right] \mathbf{a}^0 = \\ &= \mathbf{B}^{(K-1)} \mathbf{P} \left(x_2 - \alpha_2 + \frac{m_2}{2} \right) \mathbf{a}^0 - \mathbf{C}^{(K-1)} \mathbf{P} \left(\alpha_2 - x_2 + \frac{m_2}{2} \right) \mathbf{a}^0 - \\ &- [\mathbf{B}^{(K-1)} - \mathbf{C}^{(K-1)}] \mathbf{a}^0 \quad \text{si } \alpha_2 - \frac{m_2}{2} \leq x_2 \leq \alpha_2 + \frac{m_2}{2} \end{aligned}$$

siendo:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^0 &= \frac{Z_0 \sin \lambda \alpha_1}{\lambda^4 l_1 D} \cdot \sin \frac{\lambda m_1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}^{(-1)} &= -\mathbf{C}^{(-1)} = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y \mathbf{R}_f^0 toma la forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_f^0 &= \mathbf{G}_f \mathbf{C} \left[\mathbf{P} \left(\alpha_2 - \frac{m_2}{2} - x_2 \right) + \mathbf{P} \left(\alpha_2 + \frac{m_2}{2} - x_2 \right) \right] \mathbf{a}^0 \quad \text{si} \quad x_2 \leq \alpha_2 - \frac{m_2}{2} \\ \mathbf{R}_f^0 &= \mathbf{G}_f \mathbf{B} \left[\mathbf{P} \left(x_2 + \frac{m_2}{2} - \alpha_2 \right) + \mathbf{P} \left(x_2 - \frac{m_2}{2} - \alpha_2 \right) \right] \mathbf{a}^0 \quad \text{si} \quad x_2 \geq \alpha_2 + \frac{m_2}{2} \\ \mathbf{R}_f^0 &= \mathbf{G}_f \left[\mathbf{B} \mathbf{P} \left(x_2 - \alpha_2 + \frac{m_2}{2} \right) - \mathbf{C} \mathbf{P} \left(\alpha_2 - x_2 + \frac{m_2}{2} \right) \right] \mathbf{a}^0 - \mathbf{G}_f (\mathbf{B} - \mathbf{C}) \mathbf{a}^0 \\ &\quad \text{si} \quad \alpha_2 - \frac{m_2}{2} \leq x_2 \leq \alpha_2 + \frac{m_2}{2}\end{aligned}$$

siendo ahora:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{(-1)} \\ \mathbf{B}^{(0)} \\ \mathbf{B}^{(1)} \\ \mathbf{B}^{(2)} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{(-1)} \\ \mathbf{C}^{(0)} \\ \mathbf{C}^{(1)} \\ \mathbf{C}^{(2)} \end{bmatrix}$$

De manera análoga a los apartados anteriores se definen las submatrices \mathbf{d}_{f0}^0 , \mathbf{d}_{f1}^0 , \mathbf{p}_{f0}^0 y \mathbf{p}_{f1}^0 .

2.1.5. Solución inicial.

Es la correspondiente a condiciones cinemáticas nulas a lo largo de los bordes $x_2 = 0$ y $x_2 = l_2$, es decir, $\mathbf{d}_{f0} = \mathbf{0}$.

Esta solución \mathbf{R}_f^i será suma de la solución particular \mathbf{R}_f^0 y la solución complementaria \mathbf{R}_f^c .

Por definición:

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_{f0}^i &= \mathbf{d}_{f0}^0 + \mathbf{d}_{f0}^c = \mathbf{0} \\ \mathbf{d}_{f1}^i &= \mathbf{d}_{f1}^0 + \mathbf{d}_{f1}^c = \mathbf{0}\end{aligned}$$

Es decir, para el caso de carga puntual:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_f^d \mathbf{C} \mathbf{P}(\alpha_2) \mathbf{a}^0 \\ \mathbf{G}_f^d \mathbf{B} \mathbf{P}(l_2 - \alpha_2) \mathbf{a}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{G}_f^d \mathbf{B} & \mathbf{G}_f^d \mathbf{C} \mathbf{P}(l_2) \\ \mathbf{G}_f^d \mathbf{B} \mathbf{P}(l_2) & \mathbf{G}_f^d \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{a}_{34} \end{bmatrix}_i = \mathbf{0}$$

de donde se deduce:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{a}_{34} \end{bmatrix}_i = - \begin{bmatrix} \mathbf{G}_f^d \mathbf{B} & \mathbf{G}_f^d \mathbf{C} \mathbf{P}(l_2) \\ \mathbf{G}_f^d \mathbf{B} \mathbf{P}(l_2) & \mathbf{G}_f^d \mathbf{C} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_f^d \mathbf{C} \mathbf{P}(\alpha_2) \mathbf{a}^0 \\ \mathbf{G}_f^d \mathbf{B} \mathbf{P}(l_2 - \alpha_2) \mathbf{a}^0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Con los valores de \mathbf{a}_{12} y \mathbf{a}_{34} , deducidos de (6), se obtiene \mathbf{R}_f^c , y de ahí \mathbf{R}_f^i , puesto que:

$$\mathbf{R}_f^i = \mathbf{R}_f^0 + \mathbf{R}_f^c$$

En particular, se conoce:

$$\mathbf{p}_{f0}^i = \mathbf{p}_{f0}^0 + \mathbf{p}_{f0}^c$$

$$\mathbf{p}_{f1}^i = \mathbf{p}_{f1}^0 + \mathbf{p}_{f1}^c$$

Y de forma análoga se procedería para el caso de carga rectangular.

2.2. LAJA.

La ecuación general de la laja es:

$$\nabla^4 \phi = \int (X_{1,22} + \nu X_{1,11}) dx_1 + \int (X_{2,11} + \nu X_{2,22}) dx_2 \quad (7)$$

Las expresiones de los desplazamientos y esfuerzos son:

$$\left. \begin{aligned} n_{11} &= \phi_{,22} - \int X_1 dx_1 = E h (u_{1,1} + \nu u_{2,2}) \\ n_{22} &= \phi_{,11} - \int X_2 dx_2 = E h (u_{2,2} + \nu u_{1,1}) \\ n_{12} &= -\phi_{,12} = n_{21} = \frac{E h}{2(1+\nu)} (u_{1,2} + u_{2,1}) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Los signos positivos están indicados en las figuras 5, 6, y 7.

Las condiciones a lo largo de los bordes $x_1 = 0$ y $x_1 = l_1$ son:

$$u_2 = 0 \quad \text{y} \quad n_{11} = 0$$

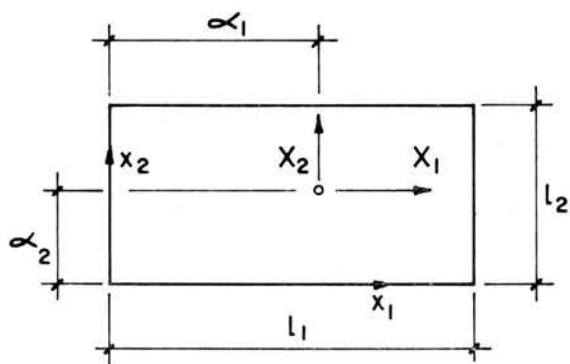
2.2.1. Solución complementaria.

Procediendo de manera análoga al apartado 2.1.1. se supone:

$$\phi = \phi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{n,2}(x_2) \sin \lambda_n x_1, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{l_1} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

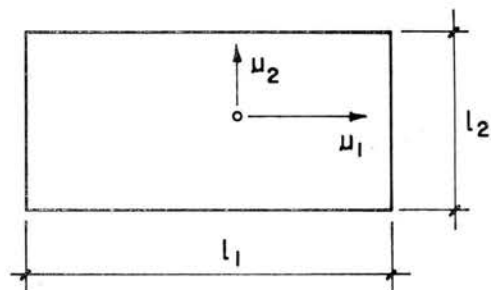
y considerando el término n-simo y al no escribir el subíndice n, se llega a la siguiente expresión:

$$\frac{d^k f(x_2)}{dx_2^k} = \mathbf{B}^{(k)} \mathbf{P}(x_2) \mathbf{b}_{12} + \mathbf{C}^{(k)} \mathbf{P}(y_2) \mathbf{b}_{34}$$



EJES ADOPTADOS

Figura 5.



DESPLAZAMIENTOS

Figura 6.

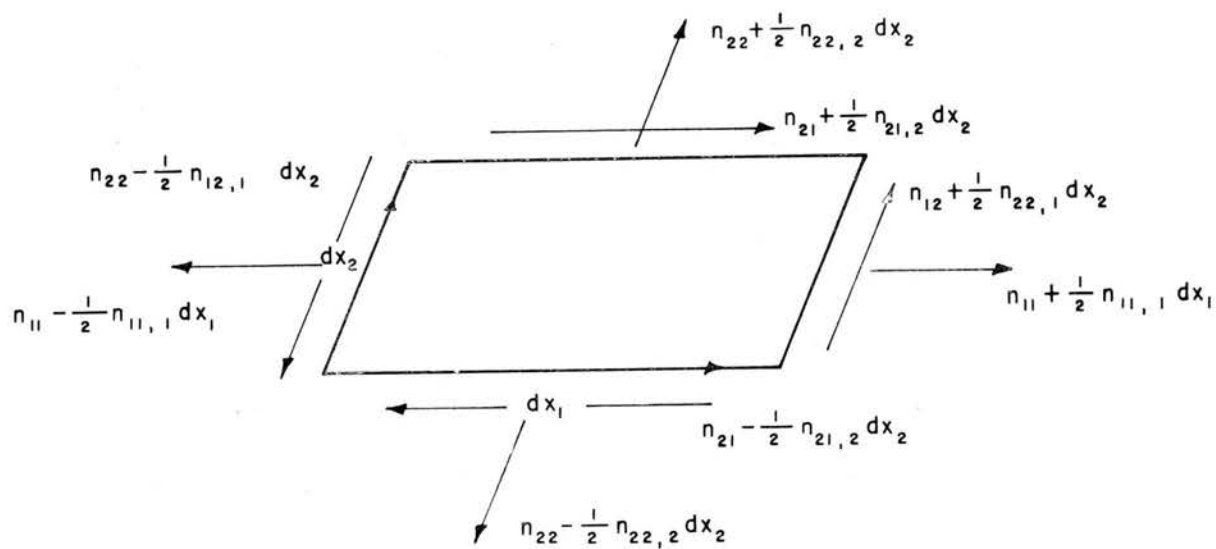


Figura 7.

en donde las matrices $\mathbf{B}^{(k)}$, $\mathbf{C}^{(k)}$ y \mathbf{P} tienen la misma significación del apartado anterior y:

$$\mathbf{b}_{12} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_{34} = \begin{bmatrix} b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \quad \text{dimensión } (2 \times 1)$$

b_1 , b_2 , b_3 y b_4 son constantes arbitrarias.

Se define el vector resultante \mathbf{R}_m como:

$$\mathbf{R}_m = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ n_{11} \\ n_{22} \\ n_{12} \end{bmatrix} \quad \text{dimensión } (5 \times 1)$$

En donde u_1 y n_{12} varían a lo largo de x_1 como $\cos \lambda x_1$ y los restantes elementos como $\sin \lambda x_1$. Los elementos de \mathbf{R}_m son las amplitudes de estas funciones.

Teniendo en cuenta (8), \mathbf{R}_m toma en el caso de la solución complementaria la siguiente forma:

$$\mathbf{R}_m^c = \mathbf{G}_m [\mathbf{B} \mathbf{P}(x_2) \mathbf{b}_{12} + \mathbf{C} \mathbf{P}(y_2) \mathbf{b}_{34}]$$

Con:

$$\mathbf{G}_m = \begin{bmatrix} \cdot & \frac{-\nu \lambda}{E h (1 - \nu^2)} & \cdot & \frac{-1}{\lambda E h (1 - \nu^2)} \\ \frac{-\lambda^2}{E h (1 - \nu^2)} & \cdot & \frac{-\nu}{E h (1 - \nu^2)} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & -\lambda^2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -\lambda & \cdot \end{bmatrix}$$

Las matrices \mathbf{B} y \mathbf{C} tienen la misma significación que en el apartado 2.1.1.

Se definen análogamente los vectores:

$$\mathbf{d}_m = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{p}_m = \begin{bmatrix} n_{12} \\ n_{22} \end{bmatrix}$$

cuyos valores para la solución complementaria son:

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_m^c &= \mathbf{G}_m^d [\mathbf{B} \mathbf{P} (x_2) \mathbf{b}_{12} + \mathbf{C} \mathbf{P} (y_2) \mathbf{b}_{34}] \\ \mathbf{p}_m^c &= \mathbf{G}_m^c [\mathbf{B} \mathbf{P} (x_2) \mathbf{b}_{12} + \mathbf{C} \mathbf{P} (y_2) \mathbf{b}_{34}]\end{aligned}$$

en donde \mathbf{G}_m^d y \mathbf{G}_m^p son las correspondientes submatrices de dimensión (2×4) de la matriz \mathbf{G}_m .

Los valores de \mathbf{d}_m y \mathbf{p}_m en $x_2 = 0$ y $x_2 = l_2$ se designan por \mathbf{d}_{m0} , \mathbf{d}_{m1} , \mathbf{p}_{m0} , y \mathbf{p}_{m1} , respectivamente, es decir:

$$\left. \begin{aligned}\mathbf{d}_{m0} &= \mathbf{G}_m^d [\mathbf{B} \mathbf{b}_{12} + \mathbf{C} \mathbf{P} (l_2) \mathbf{b}_{34}] \\ \mathbf{d}_{m1} &= \mathbf{G}_m^d [\mathbf{B} \mathbf{P} (l_2) \mathbf{b}_{12} + \mathbf{C} \mathbf{b}_{34}] \\ \mathbf{p}_{m0} &= \mathbf{G}_m^p [\mathbf{B} \mathbf{b}_{12} + \mathbf{C} \mathbf{P} (l_2) \mathbf{b}_{34}] \\ \mathbf{p}_{m1} &= \mathbf{G}_m^p [\mathbf{B} \mathbf{P} (l_2) \mathbf{b}_{12} + \mathbf{C} \mathbf{b}_{34}]\end{aligned} \right\} \quad (9)$$

2.2.2. Matriz de rigidez.

La matriz de rigidez en ejes locales \mathbf{k}_m se obtiene a partir de (9), eliminando \mathbf{b}_{12} y \mathbf{b}_{34} :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_{m1} \\ \mathbf{p}_{m0} \end{bmatrix} = \mathbf{k}_m \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{m1} \\ \mathbf{d}_{m0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{m11} & \mathbf{k}_{m10} \\ \mathbf{k}_{m01} & \mathbf{k}_{m00} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{m1} \\ \mathbf{d}_{m0} \end{bmatrix} \quad (10)$$

En donde \mathbf{k}_m viene dada por la expresión:

$$\mathbf{k}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_m^p \mathbf{B} \mathbf{P} (l_2) & \mathbf{G}_m^p \mathbf{C} \\ \mathbf{G}_m^p \mathbf{B} & \mathbf{G}_m^p \mathbf{C} \mathbf{P} (l_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_m^d \mathbf{B} \mathbf{P} (l_2) & \mathbf{G}_m^d \mathbf{C} \\ \mathbf{G}_m^d \mathbf{B} & \mathbf{G}_m^d \mathbf{C} \mathbf{P} (l_2) \end{bmatrix}^{-1}$$

2.2.3. Matriz de transferencia.

Se obtiene de (9):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_{m1} \\ \mathbf{d}_{m1} \end{bmatrix} = \mathbf{t}_m \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{m0} \\ \mathbf{d}_{m0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{m11} & \mathbf{t}_{m12} \\ \mathbf{t}_{m21} & \mathbf{t}_{m22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{m0} \\ \mathbf{d}_{m0} \end{bmatrix}$$

Siendo:

$$\mathbf{t}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_m^p \mathbf{B} \mathbf{P} (l_2) & \mathbf{G}_m^p \mathbf{C} \\ \mathbf{G}_m^d \mathbf{B} \mathbf{P} (l_2) & \mathbf{G}_m^d \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_m^p \mathbf{B} & \mathbf{G}_m^p \mathbf{C} \mathbf{P} (l_2) \\ \mathbf{G}_m^d \mathbf{B} & \mathbf{G}_m^d \mathbf{C} \mathbf{P} (l_2) \end{bmatrix}^{-1}$$

2.2.4. *Solución particular.*

Se supone que no actúan en el interior de la laja ninguna carga horizontal, por lo que $X_1 = X_2 = 0$.

Entonces, una solución particular es la solución trivial idénticamente nula, es decir:

$$\mathbf{R}_m^0 = 0$$

2.2.5. *Solución inicial.*

Se deduce análogamente que:

$$\mathbf{R}_m^i = 0$$

Y en particular, se tiene:

$$\mathbf{p}_{m\ 0}^i = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{p}_{m\ 1}^i = 0$$

3. ESTUDIO DE LA VIGA.

Se caracteriza este elemento por ser considerado en el análisis estructural como monodimensional.

Los ejes locales adoptados son paralelos a los de la losa, trasladados al centro de gravedad de la sección de la viga. Se designan por y'_1 , y'_2 , y'_3 (*).

3.1. MATRIZ DE RIGIDEZ.

Se denominan F_1 , F_2 , F_3 , G_1 , G_2 , G_3 las fuerzas exteriores actuantes por unidad de longitud sobre la viga en su centro de gravedad. U_1 , U_2 , U_3 y θ son los desplazamientos y giro alrededor de y'_1 respectivamente, en dicho punto.

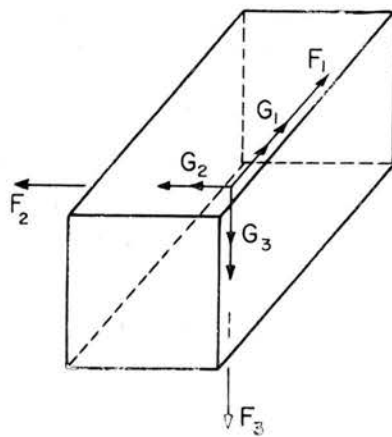
Los esfuerzos resultantes son Q_1 , Q_2 , Q_3 , M_1 , M_2 , M_3 .

Los signos positivos están indicados en la figura 8.

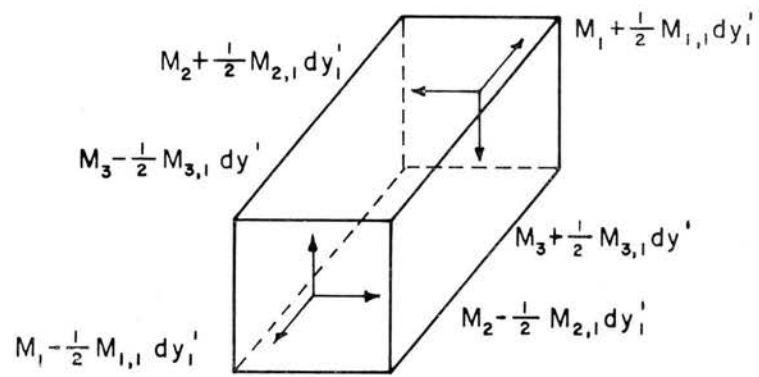
Admitiendo la hipótesis de que las secciones permanecen planas, que puede ser plausible al estudiar la flexión y la extensión, pero que respecto a la torsión no es válida, se obtienen las siguientes relaciones constitutivas (ver VI):

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= -Q_{1,1} = -E_v A U_{1,11} \\ F_2 + G_{3,1} &= -Q_{2,1} + G_{3,1} = -M_{3,11} = E_v I_2 U_{2,1111} \\ F_3 - G_{2,1} &= -Q_{3,1} - G_{2,1} = M_{2,11} = E_v I_3 U_{3,1111} \\ G_1 &= -M_{1,1} = -\frac{E_v J}{2(1 + \nu_v)} \theta_{,11} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

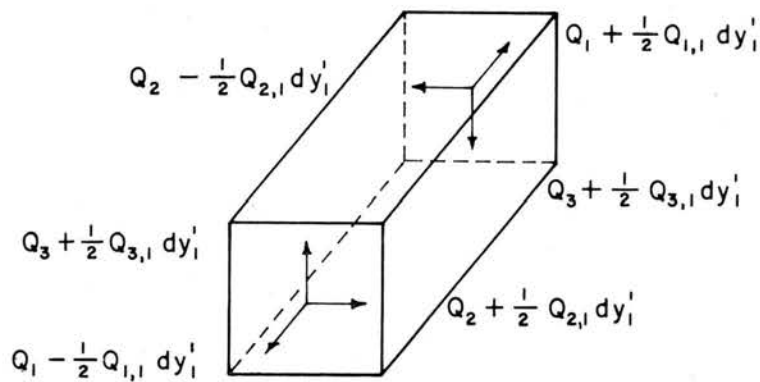
(*) Se suponen que y'_2 , y'_3 son ejes principales de inercia de la sección transversal constante de la viga.



FUERZAS EXTERIORES



ESFUERZOS MOMENTOS



ESFUERZOS FUERZAS

Figura 8.

Si se definen S_1 , S_2 , S_3 y T_1 por las siguientes igualdades:

$$S_1 = F_1$$

$$S_2 = F_2 + G_{3,1}$$

$$S_3 = F_3 - G_{2,1}$$

$$T_1 = G_1$$

y se admite que son funciones únicamente de la dirección y'_1 del tipo $\sin \lambda y'_1$, excepto S_1 , que es función de $\cos \lambda y'_1$, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ T_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_v A \lambda^2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & E_v I_2 \lambda^4 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & E_v I_3 \lambda^4 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{E_v \lambda^2}{2(1 + \nu_v)} J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \theta \end{bmatrix} \quad (11)$$

o más compactamente:

$$\mathbf{P}_v = \mathbf{K}_v \mathbf{D}_v$$

En donde los elementos de las matrices \mathbf{P}_v y \mathbf{D}_v representan las amplitudes de las funciones trigonométricas correspondientes.

3.2. EXPRESIÓN DE LOS ESFUERZOS.

De las ecuaciones (10) se puede deducir la expresión de los esfuerzos internos de la viga, obteniéndose:

$$\mathbf{R}_v = \begin{bmatrix} Q_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E_v A \lambda & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \lambda^3 E_v I_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \lambda^3 E_v I_3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\lambda E_v J}{2(1 + \nu_v)} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -\lambda^2 E_v I_3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \lambda^2 E_v I_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \theta \end{bmatrix} \quad (12)$$

o más compactamente:

$$\mathbf{R}_v = \mathbf{H} \mathbf{D}_v$$

siendo:

$$R_2 = Q_2 - G_3 \quad \text{y} \quad R_3 = Q_3 + G_2$$

Todos los esfuerzos en la viga varían longitudinalmente, como $\sin \lambda y'_1$, excepto R_2 , R_3 y M_1 , que lo hacen como $\cos \lambda y'_1$.

Los elementos de \mathbf{R}_v son las amplitudes de estas funciones trigonométricas.

4. TRANSFORMACION DE COORDENADAS.

Al ser los ejes x_1, x_2, x_3 paralelos a los ejes y'_1, y'_2, y'_3 , no es necesario realizar una transformación rotatoria de los ejes, siendo suficiente una traslación.

Sean (a, b) las coordenadas del punto de intersección de la losa con la viga, respecto a los ejes (y'_2, y'_3) .

Las fórmulas de traslación de las fuerzas de la losa \mathbf{p}_f y \mathbf{p}_m a los ejes (y'_1, y'_2, y'_3) son:

$$\begin{aligned} F_1 &= n_{12} & G_1 &= m_{22} + b n_{22} - a r_2 \\ F_2 &= n_{22} & G_2 &= -b n_{12} \\ F_3 &= r_2 & G_3 &= a n_{12} \end{aligned}$$

o bien:

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ T_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & . & . & . \\ -\lambda a & 1 & . & . \\ -\lambda b & . & 1 & . \\ . & b & -a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{12} \\ n_{22} \\ r_2 \\ m_{22} \end{bmatrix}$$

o más compactamente:

$$\mathbf{P} = \mathbf{T} \mathbf{p} \quad \text{con} \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_m \\ \mathbf{p}_f \end{bmatrix} \quad \text{dimensión } (4 \times 1)$$

Aplicando la anterior transformación al borde $x_2 = 0$ de la losa:

$$\mathbf{P}_0 = -\mathbf{T}_0 \mathbf{p}_0 (*) \quad (13)$$

y al borde $x_2 = l_2$:

$$\mathbf{P}_1 = +\mathbf{T}_1 \mathbf{p}_1 (*) \quad (14)$$

(*) \mathbf{P}_0 y \mathbf{P}_1 son las acciones de las vigas de borde sobre las losas.

Por la propiedad de contragradencia de \mathbf{p} y \mathbf{d} las siguientes igualdades son válidas:

$$\mathbf{d} = \mathbf{T}^t \mathbf{D} \quad \text{con} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_m \\ \mathbf{d}_f \end{bmatrix} \quad \text{dimensión } (4 \times 1)$$

Que en los bordes $x_2 = 0$ y $x_2 = l_2$ se convierten en:

$$\mathbf{d}_0 = \mathbf{T}_0^t \mathbf{D}_0 \quad (15)$$

$$\mathbf{d}_1 = \mathbf{T}_1^t \mathbf{D}_1 \quad (16)$$

Se puede comprobar que:

$$[\mathbf{T}_0^{-1}]^t = \begin{bmatrix} 1 & \lambda a & \lambda b & . \\ . & 1 & . & -b \\ . & . & 1 & a \\ . & . & . & 1 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones (13) y (14) constituyen las fórmulas de traslación estáticas y las (15) y (16) son denominadas de traslación cinemáticas.

En particular los vectores trasladados de la solución inicial al centro de gravedad de la viga son:

$$\mathbf{P}_0^i = -\mathbf{T}_0 \mathbf{p}_0^i = -\mathbf{T}_0 \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{p}_{f0}^i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_1^i = +\mathbf{T}_1 \mathbf{p}_1^i = +\mathbf{T}_1 \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{p}_{f1}^i \end{bmatrix}$$

En el caso de que los ejes x_2, x_3 no sean paralelos a los ejes y'_2, y'_3 , la transformación rotatoria previa sería:

$$\mathbf{p}^r = \mathbf{p} \mathbf{O}$$

siendo:

$$\mathbf{p}^r = \begin{bmatrix} n_{12}^r \\ n_{22}^r \\ r_2^r \\ m_{22}^r \end{bmatrix} \quad \text{los esfuerzos respecto a los ejes } x_1, x_2, z_3 \text{ girados de forma que resulten paralelos a } y'_1, y'_2, y'_3.$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} n_{12} \\ n_{22} \\ r_2 \\ m_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{los esfuerzos referidos al triedro } x_1, \\ x_2, z_3. \end{array}$$

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 1 & . & . & . \\ . & \cos \alpha & -\sin \alpha & . \\ . & \sin \alpha & \cos \alpha & . \\ . & . & . & 1 \end{bmatrix} \quad \text{la matriz de transformación.}$$

y

$\alpha = \text{ángulo de } x'_2 \text{ respecto } y'_2.$

Análogamente:

$$\mathbf{d} = \mathbf{O}^T \mathbf{d}'$$

Y las fórmulas anteriores valen substituyendo la matriz \mathbf{T} por $\mathbf{T}' = \mathbf{T} \mathbf{O}$.

5. MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA LOSA EN EJES GENERALES (DE VIGAS).

De los apartados 2.1.2 y 2.2.2 se deduce la matriz de rigidez del elemento losa considerando sus dos tipos de trabajo, de placa y de laja:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_0 \end{bmatrix} = \mathbf{k} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{10} \\ \mathbf{k}_{01} & \mathbf{k}_{00} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_0 \end{bmatrix}$$

con

$$\mathbf{k}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{mij} & \cdot \\ \cdot & \mathbf{k}_{fij} \end{bmatrix} \quad (i, j = 0, 1) \quad \text{dimensión } (4 \times 4)$$

Teniendo en cuenta las fórmulas (13), (14), (15) y (16) se llega a la expresión de la matriz de rigidez \mathbf{K} en ejes generales:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_0 \end{bmatrix} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 \\ \mathbf{D}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\mathbf{T}_1 \mathbf{k}_{11} \mathbf{T}_1^t & +\mathbf{T}_1 \mathbf{k}_{10} \mathbf{T}_0^t \\ -\mathbf{T}_0 \mathbf{k}_{01} \mathbf{T}_1^t & -\mathbf{T}_0 \mathbf{k}_{00} \mathbf{T}_0^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 \\ \mathbf{D}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{10} \\ \mathbf{K}_{01} & \mathbf{K}_{00} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 \\ \mathbf{D}_0 \end{bmatrix}$$

es decir:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{T}_0 \end{bmatrix} \mathbf{k} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1^t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_0^t \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{K}_{ij} = (-1)^{i+1} \mathbf{T}_i \mathbf{k}_{ij} \mathbf{T}_j^t \quad (i, j = 0, 1).$$

6. PLANTEAMIENTO DE LAS ECUACIONES MODALES. MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA.

Las ecuaciones modales son las ecuaciones de equilibrio en los nudos en función de sus desplazamientos o “modos” de movimiento de la estructura.

La forma de estas ecuaciones depende fundamentalmente de la topología de la estructura, es decir, de la conexión entre sus distintos elementos.

Con objeto de mostrar la técnica standard de formación de estas ecuaciones, se desarrolla el ejemplo de la figura 9.

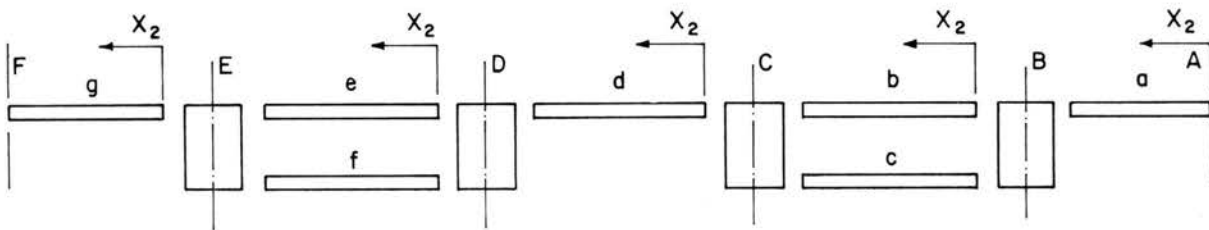


Figura 9.

Las ecuaciones de equilibrio son:

$$- \mathbf{P}^i + \mathbf{P}^v - \mathbf{K}_g \mathbf{D} = 0 \quad (17)$$

en donde \mathbf{P}^v son las cargas exteriores que actúan sobre cada viga en la sección $y'_1 = \alpha_1$, es decir, para el término n-simo de la serie de Fourier:

$$\mathbf{P}^v = \begin{bmatrix} S_1^v \\ S_2^v \\ S_3^v \\ T_1^v \end{bmatrix} \frac{2 \operatorname{sen} \lambda \sigma_1}{l_1}$$

y \mathbf{K}_g la matriz de rigidez de toda la estructura.

Las ecuaciones de equilibrio (17) desarrolladas toman la forma:

$$\begin{bmatrix} P_{a0}^i \\ P_{a1}^i + P_{b0}^i + P_{c0}^i - P_B^v \\ P_{b1}^i + P_{c1}^i + P_{d0}^i - P_C^v \\ P_{d1}^i + P_{e0}^i + P_{f0}^i - P_D^v \\ P_{e1}^i + P_{f1}^i + P_{g0}^i - P_E^v \\ P_{g1}^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{00a} & K_{01a} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{10a} & K_{11a} + K_{00b} & K_{01b} + K_{01c} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & K_{00c} + K_{vB} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & K_{10b} + K_{10c} & K_{11b} + K_{11c} & K_{01d} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & K_{10d} & K_{11d} + K_{00e} & K_{01e} + K_{01f} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & K_{00f} + K_{vD} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & K_{10e} + K_{10f} & K_{11e} + K_{11f} & K_{01g} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & K_{00g} + K_{vE} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & K_{10g} & K_{11g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_A \\ D_B \\ D_C \\ D_D \\ D_E \\ D_F \end{bmatrix} = 0$$

La dimensión de la matriz de rigidez de toda la estructura puede disminuirse si se introduce la condición de borde libre de las losas a y g, es decir:

Losa a.

Matriz de rigidez:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{10} \\ K_{01} & K_{00} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

luego:

$$P_1 = [K_{11} - K_{10} K_{00}^{-1} K_{01}] D_1 = \hat{K}_{11} D_1$$

análogamente:

$$\hat{P}_{a1}^i = P_{a1}^i - K_{10} K_{00}^{-1} P_{a0}^i$$

En \hat{K}_{11} y \hat{P}_{a1} se ha introducido la condición de que el borde $x_2 = 0$ es libre.

Losa g.

De modo similar se obtiene:

$$P_0 = \hat{K}_{00} D_0 = [K_{00} - K_{01} K_{11}^{-1} K_{10}] D_0$$

$$\hat{P}_{g0}^i = P_{g0}^i - K_{01} K_{11}^{-1} P_{g1}^i$$

Los vectores $\hat{\mathbf{P}}_{a1}^i$ o $\hat{\mathbf{P}}_{g0}^i$ podrían deducirse también por un procedimiento análogo al realizado para el caso de losa biempotrada (solución inicial) y se llega entonces a los resultados:

Losa a:

$$\hat{\mathbf{P}}_{a1}^i = \mathbf{T}_{a1} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{p}_{f1}^i \end{bmatrix}$$

Siendo:

$$\mathbf{p}_{f1}^i = \mathbf{G}_f^p \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{P}(l_2 - a_2) \cdot \mathbf{a}^0 + \mathbf{G}_f^p [\mathbf{B} \cdot \mathbf{P}(l_2) \mathbf{a}_{12}^i + \mathbf{C} \mathbf{a}_{34}^i]$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{12}^i \\ \mathbf{a}_{34}^i \end{bmatrix}_a = - \begin{bmatrix} \mathbf{G}_f^p \mathbf{B} & \mathbf{G}_f^p \mathbf{C} \mathbf{P}(l_2) \\ \mathbf{G}_f^d \mathbf{B} \mathbf{P}(l_2) & \mathbf{G}_f^d \mathbf{C} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_f^p \mathbf{C} \mathbf{P}(a_2) \mathbf{a}^0 \\ \mathbf{G}_f^d \mathbf{B} \mathbf{P}(l_2 - a_2) \mathbf{a}^0 \end{bmatrix}$$

Losa g:

$$\hat{\mathbf{P}}_{g0}^i = \mathbf{T}_{g0} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{p}_{f0}^i \end{bmatrix}$$

en donde:

$$\mathbf{p}_{f0}^i = \mathbf{G}_f^p \mathbf{C} \mathbf{P}(a_2) \mathbf{a}^0 + \mathbf{G}_f^p [\mathbf{B} \mathbf{a}_{12}^i + \mathbf{C} \mathbf{P}(l_2) \mathbf{a}_{34}^i]$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{12}^i \\ \mathbf{a}_{34}^i \end{bmatrix}_g = - \begin{bmatrix} \mathbf{G}_f^d \mathbf{B} & \mathbf{G}_f^d \mathbf{C} \mathbf{P}(l_2) \\ \mathbf{G}_f^p \mathbf{B} \mathbf{P}(l_2) & \mathbf{G}_f^p \mathbf{C} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_f^d \mathbf{C} \mathbf{P}(a_2) \mathbf{a}^0 \\ \mathbf{G}_f^p \mathbf{B} \mathbf{P}(l_2 - a_2) \mathbf{a}^0 \end{bmatrix}$$

De esta manera las ecuaciones (17) se convierten en:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}}_{a1}^i + \mathbf{P}_{b0}^i + \mathbf{P}_{c0}^i - \mathbf{P}_B^v \\ \mathbf{P}_{b1}^i + \mathbf{P}_{c1}^i + \mathbf{P}_{d0}^i - \mathbf{P}_C^v \\ \mathbf{P}_{d1}^i + \mathbf{P}_{e0}^i + \mathbf{P}_{f0}^i - \mathbf{P}_D^v \\ \mathbf{P}_{e1}^i + \mathbf{P}_{f1}^i + \hat{\mathbf{P}}_{g0}^i - \mathbf{P}_E^v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{11a} + \mathbf{K}_{00b} & \mathbf{K}_{01b} + \mathbf{K}_{01c} & \bullet & \bullet \\ \mathbf{K}_{00c} + \mathbf{K}_{vB} & & & \\ \mathbf{K}_{10b} + \mathbf{K}_{10c} & \mathbf{K}_{11b} + \mathbf{K}_{11c} & \mathbf{K}_{01d} & \bullet \\ & \mathbf{K}_{00d} + \mathbf{K}_{vC} & & \\ \bullet & \mathbf{K}_{10d} & \mathbf{K}_{11d} + \mathbf{K}_{00e} & \mathbf{K}_{01e} + \mathbf{K}_{01f} \\ & & \mathbf{K}_{00f} + \mathbf{K}_{vD} & \\ \bullet & \bullet & \mathbf{K}_{10e} + \mathbf{K}_{10f} & \mathbf{K}_{11e} + \mathbf{K}_{11f} \\ & & & \hat{\mathbf{K}}_{00g} + \mathbf{K}_{vE} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_B \\ \mathbf{D}_C \\ \mathbf{D}_D \\ \mathbf{D}_E \end{bmatrix} = 0$$

Normalmente en puentes, los voladizos a y g tienen los bordes $x_1 = 0$ y $x_1 = l_1$ libres, por lo que la ecuación (18) debe ser ligeramente modificada. Los términos \hat{K}_{11a} y \hat{K}_{00g} desaparecen, y en el caso de que los voladizos no estén cargados $\hat{P}_{a1} = \hat{P}_{g0} = 0$. Si existe carga en alguno de ellos, la aproximación de calcular \hat{P}_{a1} y \hat{P}_{g0} por medio de las fórmulas anteriores es suficiente, pues l_2 suele ser muy pequeño con relación a l_1 en las losas voladas.

7. SOLUCION FINAL.

Una vez obtenidos los desplazamientos \mathbf{D}_v de los nudos a partir de las ecuaciones modales del apartado anterior, es necesario conocer la expresión del vector resultante \mathbf{R}^c en término de dichos desplazamientos.

La solución final en cada elemento de la estructura será la suma de la solución inicial \mathbf{R}^i y la modal \mathbf{R}^c .

7.1. VIGAS.

El vector resultante de la solución modal \mathbf{R}_v^c viene dado por la fórmula (12), es decir:

$$\mathbf{R}_v^c = \mathbf{H} \mathbf{D}_v$$

con

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -E_v A \lambda & . & . & . \\ . & \lambda^3 E_v I_2 & . & . \\ . & . & \lambda^3 E_v I_3 & . \\ . & . & . & \lambda \frac{E_v J}{2(1+\nu_v)} \\ . & . & -\lambda^2 E_v I_3 & . \\ . & \lambda^2 E_v I_2 & . & . \end{bmatrix}$$

Y los esfuerzos finales son:

$$\mathbf{R}_v = \mathbf{R}_v^i + \mathbf{R}_v^c = \mathbf{R}_v^c$$

La expresión de los cortantes Q_2 y Q_3 pueden obtenerse fácilmente a partir de R_2 y R_3 de \mathbf{R}_v^c mediante las fórmulas:

$$Q_2 = R_2 + G_3^v + \sum_i (a n_{12})_0 - \sum_j (a n_{12})_1$$

$$Q_3 = R_3 - G_2^v + \sum_i (b n_{12})_0 - \sum_j (b n_{12})_1$$

siendo I el conjunto de losas que tiene su extremo cero en la viga considerada y J las que tienen su extremo 1. G_3^v y G_2^v son los momentos, si existen, aplicados externamente sobre la viga.

7.2. LOSAS.

A partir de las fórmulas (4) y (9) se deduce:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{a}_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_f^d \mathbf{B} \mathbf{P}(l_2) & \mathbf{G}_f^d \mathbf{C} \\ \mathbf{G}_f^d \mathbf{B} & \mathbf{G}_f^d \mathbf{C} \mathbf{P}(l_2) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{f1} \\ \mathbf{d}_{f0} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_{12} \\ \mathbf{b}_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_m^d \mathbf{B} \mathbf{P}(l_2) & \mathbf{G}_m^d \mathbf{C} \\ \mathbf{G}_m^d \mathbf{B} & \mathbf{G}_m^d \mathbf{C} \mathbf{P}(l_2) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{m1} \\ \mathbf{d}_{m0} \end{bmatrix}$$

Los desplazamientos en ejes locales se obtienen a partir de las fórmulas de traslación estáticas:

$$\mathbf{d}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{m0} \\ \mathbf{d}_{f0} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_0^t \mathbf{D}_0$$

$$\mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{m1} \\ \mathbf{d}_{f1} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_1^t \mathbf{D}_1$$

Y los vectores resultantes de la solución modal \mathbf{R}_f^c y \mathbf{R}_m^c vienen dados por las expresiones siguientes:

$$\mathbf{R}_f^c = \mathbf{G}_f [\mathbf{B} \mathbf{P}(x_2), \mathbf{C} \mathbf{P}(l_2 - x_2)] \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{a}_{34} \end{bmatrix}_c$$

$$\mathbf{R}_m^c = \mathbf{G}_m [\mathbf{B} \mathbf{P}(x_2), \mathbf{C} \mathbf{P}(l_2 - x_2)] \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{12} \\ \mathbf{b}_{34} \end{bmatrix}_c$$

Y los vectores resultantes finales son:

$$\mathbf{R}_f = \mathbf{R}_f^c + \mathbf{R}_f^i$$

$$\mathbf{R}_m = \mathbf{R}_m^c + \mathbf{R}_m^i = \mathbf{R}_m^c$$

8. MATRIZ DE TRANSFERENCIA DE LA LOSA EN EJES GENERALES (DE VIGAS).

De los apartados 2.1.3 y 2.2.3 se deduce la matriz de transferencia del elemento losa, considerado como conjunto de placa y laja.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{d}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{t} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{d}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{11} & \mathbf{t}_{12} \\ \mathbf{t}_{21} & \mathbf{t}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{d}_0 \end{bmatrix}$$

con:

$$\mathbf{t}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{mij} & . \\ . & \mathbf{t}_{fij} \end{bmatrix} \quad (i, j = 1, 2)$$

La expresión de esta matriz en ejes generales se deduce simplemente aplicando las fórmulas de traslación de ejes del apartado 4, obteniéndose:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{D}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{D}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{T}_1 \mathbf{t}_{11} \mathbf{T}_0^{-1} & +\mathbf{T}_1 \mathbf{t}_{12} \mathbf{T}_0^t \\ (\mathbf{T}_1^{-1})^t \mathbf{t}_{21} \mathbf{T}_0^{-1} & (\mathbf{T}_1^t)^{-1} \mathbf{t}_{22} \mathbf{T}_0^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{D}_0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

es decir:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} +\mathbf{T}_1 & . \\ . & (\mathbf{T}_1^t)^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{t} \begin{bmatrix} -\mathbf{T}_0^{-1} & . \\ . & \mathbf{T}_0^t \end{bmatrix}$$

9. PLANTEAMIENTO DE LAS ECUACIONES DE TRANSFERENCIA. MATRIZ DE TRANSFERENCIA DE LA ESTRUCTURA.

Como ejemplo de aplicación se analiza la estructura de la figura 10.

Para simplificar la escritura se introduce un vector V , tal que:

$$V = \begin{bmatrix} P \\ D \end{bmatrix}$$

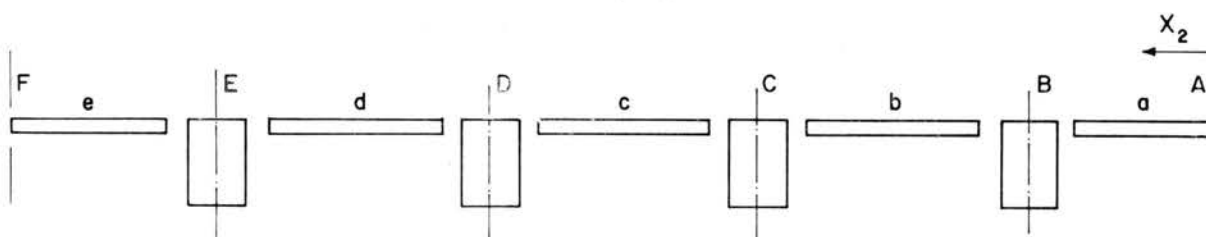


Figura 10.

con lo que la ecuación (19) puede escribirse:

$$V_1 = T V_0$$

Se denominará P_i a las fuerzas actuantes sobre la viga i , es decir:

$$P_i = P_i^v - \sum_j P_{0j}^i - \sum_k P_{1k}^i$$

siendo j todos los elementos que tiene 0.

elementos que lo tienen como extremo 0 el nudo i , y k los

En el elemento a se tiene:

$$V_{1a} = T_a V_{0a}$$

En el nudo B se pueden plantear las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad como sigue:

$$V_{0b} = \begin{bmatrix} -I - K_{vB} \\ I \end{bmatrix} V_{1a} + \begin{bmatrix} P_B \\ \cdot \end{bmatrix} = S_B V_{1a} + V_B = S_B T_a V_{0a} + V_B$$

siendo K_{vB} la matriz de rigidez de la viga B .

Análogamente se tiene para el elemento b:

$$\mathbf{V}_{1b} = \mathbf{T}_b \mathbf{V}_{0b} = \mathbf{T}_b \mathbf{S}_B \mathbf{T}_a \mathbf{V}_{0a} + \mathbf{T}_b \mathbf{V}_B$$

Y en el nudo C:

$$\mathbf{V}_{0c} = \mathbf{S}_C \mathbf{V}_{1b} + \mathbf{V}_C = \mathbf{S}_C \mathbf{T}_b \mathbf{S}_B \mathbf{T}_a \mathbf{V}_{0a} + \mathbf{S}_C \mathbf{T}_b \mathbf{V}_B + \mathbf{V}_C$$

Y procediendo igualmente en los distintos nudos y miembros de la estructura se obtiene finalmente:

$$\mathbf{V}_{1e} = \mathbf{T}_{FA} \mathbf{V}_{0a} + \mathbf{H}_{FA} \quad (20)$$

Siendo \mathbf{T}_{FA} la matriz de transferencia para toda la estructura y cuya expresión es la siguiente:

$$\mathbf{T}_{FA} = \mathbf{T}_e \mathbf{S}_E \mathbf{T}_d \mathbf{S}_D \mathbf{T}_c \mathbf{S}_C \mathbf{T}_b \mathbf{S}_B \mathbf{T}_a$$

Y \mathbf{H}_{FA} es una matriz conocida, dependiente de las fuerzas actuantes en la estructura:

$$\mathbf{H}_{FA} = \mathbf{T}_e \mathbf{S}_E \mathbf{T}_d \mathbf{S}_D \mathbf{T}_c \mathbf{S}_C \mathbf{T}_b \mathbf{V}_B + \mathbf{T}_e \mathbf{S}_E \mathbf{T}_d \mathbf{S}_D \mathbf{T}_c \mathbf{V}_C + \mathbf{T}_e \mathbf{S}_E \mathbf{T}_d \mathbf{V}_D + \mathbf{T}_e \mathbf{V}_E$$

En la ecuación (20) se pueden introducir las condiciones de borde existentes, con lo que se obtiene el vector \mathbf{V}_{0a} :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{D}_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{t}_{11})_{FA} & (\mathbf{t}_{12})_{FA} \\ (\mathbf{t}_{21})_{FA} & (\mathbf{t}_{22})_{FA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{D}_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\mathbf{h}_1)_{FA} \\ (\mathbf{h}_2)_{FA} \end{bmatrix}$$

es decir, la primera ecuación es:

$$\mathbf{0} = (\mathbf{t}_{12})_{FA} \cdot \mathbf{D}_A + (\mathbf{h}_1)_{FA}$$

$$\mathbf{V}_{0a} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{D}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -(\mathbf{t}_{12})_{FA}^{-1} (\mathbf{h}_1)_{FA} \end{bmatrix}$$

Conocido el vector \mathbf{V}_{0a} , se pueden determinar los restantes vectores \mathbf{V}_{0j} y \mathbf{V}_{1j} para un elemento genérico j de la estructura y en los que mediante las fórmulas expuestas en el apartado 7 se calcularían los vectores resultantes finales en las vigas y losas.

10. METODOS ITERATIVOS.

En la aplicación del análisis de los apartados anteriores el uso de un ordenador electrónico es, en general, necesario. Sin embargo, se pueden utilizar procedimientos iterativos de cálculo. Entre éstos se expone uno que por su semejanza con el método de Cross para estructuras reticulares planas resulta muy adecuado e intuitivo. Se desea también en este apartado poner de relieve la conveniencia de la aplicación de los métodos matriciales al cálculo de estructuras al mostrar una identidad formal de cálculo en tipos de estructuras aparentemente muy diferentes.

Este método generalizado de Cross puede verse estudiado en (V) aplicado a láminas cilíndricas, por lo que sólo se resumirá aquí, señalando las etapas de su cálculo. Paralelamente se presenta el isomorfismo existente con el cálculo de los entramados planos intraslacionales.

PUENTES

1.^a etapa. — Determinación de la solución inicial para cada elemento de la estructura y en particular P_0^i y P_1^i . La operación numérica fundamental en esta etapa es la resolución de un sistema de cuatro ecuaciones lineales por elemento cargado.

Podrían tabularse los casos de carga más frecuentes.

2.^a etapa. — Cálculo de la matriz de rigidez de los distintos elementos. Losas:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{10} \\ K_{01} & K_{00} \end{bmatrix}$$

dimensión (8×8) .

Vigas:

K_v Dimensión (4×4)

3.^a etapa. — Coeficientes de reparto en el nudo I.

En el nudo I concurren elementos j con el extremo 0 y elementos k con el extremo 1.

Para las losas j :

$$r_j = - (K_{00})_j (K_v + \sum_j K_{00} + \sum_k K_{11})^{-1}$$

Para las losas K :

$$r_k = - (K_{11})_k (K_v + \sum_j K_{00} + \sum_k K_{11})^{-1}$$

Para las vigas:

$$r_1 = - K_v (K_v + \sum_j K_{00} + \sum_k K_{11})^{-1}$$

La operación fundamental es una inversión de una matriz de dimensión (4×4) .

ENTRAMADOS PLANOS INTRASLACIONALES

1.^a etapa. — Determinación de los esfuerzos en las vigas supuestas biempotradas y en particular de los momentos rígidos M_0^i y M_1^i .

La operación numérica fundamental es la resolución de una ecuación lineal hiperestática.

Existe tabulación para los casos más frecuentes de cargas.

2.^a etapa — Cálculo de las rigideces de las vigas y nudos.

Para las vigas:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{10} \\ K_{01} & K_{00} \end{bmatrix}$$

dimensión (2×2) .

Nudos:

Si los nudos fueron elásticos, es decir, ofrecieran una rigidez al giro produciendo un momento proporcional, entonces se definiría ésta por K_v .

3.^a etapa. — Coeficientes de reparto en el nudo I.

Para las vigas j :

$$r_j = - (K_{00})_j (K_v + \sum_j K_{00} + \sum_k K_{11})$$

Para las vigas k :

$$r_k = - (K_{11})_k (K_v + \sum_j K_{00} + \sum_k K_{11})^{-1}$$

Para los nudos:

$$r_1 = - K_v (K_v + \sum_j K_{00} + \sum_k K_{11})^{-1}$$

La significación de los índices i y j , igual que en el cálculo de puentes.

La operación fundamental es la inversión de un escalar.

PUENTES

4.^a etapa. — Coeficientes de transmisión en el nudo I.

Losas j:

$$s_j = K_{0j} K_{11}^{-1}$$

Losas k:

$$s_k = K_{10} K_{00}^{-1}$$

Las operaciones en esta etapa son idénticas a las de la etapa anterior.

5.^a etapa. — Equilibrio de cada nudo I.

Se calcula primeramente en cada nudo I la fuerza desequilibrante P'_1 :

$$P'_1 = P_v - \sum_j P_0^j - \sum_k P_1^k$$

Que se reparte alrededor de cada nudo entre los distintos elementos que en él concurren.

Losas j:

$$P_{0j}' = r_j (-P'_1)$$

Losas k:

$$P_{1k}' = r_k (-P'_1)$$

Vigas I:

$$P_v' = r_1 (-P'_1)$$

La operación fundamental en esta etapa es sencilla: Suma de matrices de dimensión (4×1) y su multiplicación por otras de dimensión (4×4) .

ENTRAMADOS PLANOS INTRASLACIONALES

4.^a etapa. — Coeficientes de transmisión en el nudo I.

Vigas j:

$$s_j = K_{0j} K_{11}^{-1}$$

Vigas k:

$$s_k = K_{10} K_{00}^{-1}$$

Las operaciones en esta etapa son idénticas a las de la etapa anterior.

5.^a etapa. — Equilibrio de cada nudo I. Se calcula en cada nudo I el momento resultante en desequilibrio, que se designa por M'_1 :

$$M'_1 = M_v - \sum_j M_0^j - \sum_k M_1^k$$

Que se reparte alrededor de cada nudo entre los distintos elementos que en él concurren.

Vigas j:

$$M_{0j}' = r_j (-M'_1)$$

Vigas k:

$$M_{1k}' = r_k (-M'_1)$$

Nudo I:

$$M_v' = r_1 (-M'_1)$$

La operación fundamental en esta etapa es muy sencilla: Suma de escalares y multiplicarlos por otros que son los coeficientes de reparto.

PUENTES

6.^a etapa. — Transmisión de esfuerzos.

En cada elemento se obtienen los esfuerzos actuando en el borde opuesto al del nudo I.

Losas j:

$$P'_{1j} = s_j P'_{0j}$$

Losas k:

$$P'_{0k} = s_k P'_{1k}$$

La operación fundamental en esta etapa consiste en multiplicar matrices de dimensión (4×4) por vectores de dimensión (4×1) .

Al finalizar la etapa 6.^a quedan de nuevo desequilibrados los nudos, debiéndose repetir las etapas 5.^a y 6.^a, sucesivamente, tantas veces como se precise para obtener la aproximación deseada en el cálculo. La convergencia de este proceso puede ser demostrada.

ENTRAMADOS PLANOS INTRASLACIONALES

6.^a etapa. — Transmisión de momentos.

En cada viga se calcula el momento que se transmite al borde opuesto al nudo I.

Vigas j:

$$M'_{1j} = s_j M'_{0j}$$

Vigas k:

$$M'_{0k} = s_k M'_{1k}$$

La operación fundamental consiste en la multiplicación de escalares.

11. EJEMPLO DE APLICACION.

La teoría desarrollada previamente sobre la aplicación del método de los desplazamientos al cálculo de puentes se ha programado en lenguaje FORTRAN IV para un ordenador IBM-360.

El ejemplo que se presenta corresponde a la sección transversal de la figura 9. La tabla I describe la hoja de entrada de datos, ya tipificada, para su relleno por una persona totalmente ajena al desarrollo técnico expuesto anteriormente.

Se comprueba la corrección de la lectura de estos datos por el computador, ordenando la impresión de los mismos en la forma que se indica más abajo.

Los resultados en las diferentes secciones son obtenidos bajo el título de valores totales, es decir, suma de todos los armónicos considerados. Si se deseara conocer los resultados parciales o resultados debidos a cada armónico de carga, se pueden imprimir separadamente dentro del mismo proceso de cálculo.

En general, la convergencia es buena con relación a los valores de los desplazamientos y empeora respecto a los restantes resultados, que son función de los desplazamientos, a medida que se incrementa el orden de derivación de éstos.

DATOS GENERALES

5 VIGAS. 7 LOSAS. 9 ARMONICOS.

LONGITUD DEL TABLERO 24.00
MODULOS DE ELASTICIDAD. LOSAS 2000000. VIGAS 2000000.
COEFICIENTE DE POISSON 0.15

DATOS DE LOSAS

LOSA	VIGA1	VIGA0	ANCHO	ESPESOR	A1	B1	A0	B0	X1	X2	P
1	1	2	2.40	0.33	0.0	0.0	0.80	-0.58	0.0	0.0	0.0
2	2	3	2.70	0.24	-0.70	-0.66	0.70	-0.66	12.00	1.35	100.00
3	3	4	4.80	0.33	-0.80	-0.58	0.80	-0.58	0.0	0.0	0.0
4	4	5	2.70	0.24	-0.70	-0.66	0.70	-0.66	0.0	0.0	0.0
5	5	6	2.40	0.33	-0.80	-0.58	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
6	2	3	2.70	0.21	-0.70	0.51	0.70	0.51	0.0	0.0	0.0
7	4	5	2.70	0.21	-0.70	0.51	0.70	0.51	0.0	0.0	0.0

DATOS DE VIGAS


VIGA	AREA	I2	I3	J	X1	S1	S2	S3	T
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	2.0830	0.3343	0.3943	0.5683	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3	2.0830	0.3343	0.3943	0.5683	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
4	2.0830	0.3343	0.3943	0.5683	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
5	2.0830	0.3343	0.3943	0.5683	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

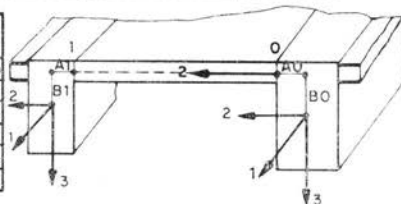
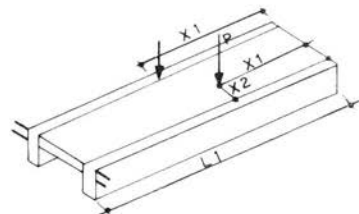
TABLE I.

REPARTO DE CARGAS EN SECCIONES TRANSVERSALES DE UN PUENTE

TIPO FICHA		NUMERO		DE	MODULOS DE ELASTICIDAD		COEFICIENTE DE POISSON	LONGITUD DEL TABLERO L1	
K	DESCRIP.	VIGAS	LOSAS	ARMONICOS CONSIDERAD	LOSAS	VIGAS			
1	GENE		6	7	9	20000000.	20000000.	0.15	24.00

[illegible]

TIPO FICHA		VIGA	Nº		AREA	MOMENTOS		DE INERCIA		MOMENTO TORSIONAL															
K	DESCRIP					I 2	I 3																		
3	V I G A	1			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0							
3	V I G A	2			2	0	8	3	0	0	3	3	4	3	0	0	3	9	4	3	0	5	6	8	3
3	V I G A	3			2	0	8	3	0	0	3	3	4	3	0	0	3	9	4	3	0	5	6	8	3
3	V I G A	4			2	0	8	3	0	0	3	3	4	3	0	0	3	9	4	3	0	5	6	8	3
3	V I G A	5			2	0	8	3	0	0	3	3	4	3	0	0	3	9	4	3	0	5	6	8	3
3	V I G A	6			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

[illegible][illegible]

VALORES TOTALES EN LA SECCION 0.0 L1

LOSA 1	0	0.5 L2	L2		0	0.5 L2	L2
W	0.0	0.0	0.0	U1	0.41	0.38	0.38
W,1	0.90	0.92	0.95	U2	0.0	0.0	0.0
W,2	0.0	0.0	0.0	N11	0.0	0.0	0.0
M11	0.0	0.0	0.0	N22	0.0	0.0	0.0
M22	0.0	0.0	0.0	N12	-8.48	-4.27	-0.00
M12	-0.11	-0.12	-0.13				
Q1	0.02	0.06	0.06				
Q2	0.0	0.0	0.0				
R1	-0.02	0.05	0.05				
R2	0.0	0.0	0.0				

LOSA 2	0	0.5 L2	L2		0	0.5 L2	L2
W	0.0	0.0	0.0	U1	0.38	0.40	0.45
W,1	0.81	0.96	0.86	U2	0.0	0.0	0.0
W,2	0.0	0.0	0.0	N11	0.0	0.0	0.0
M11	0.0	0.0	0.0	N22	0.0	0.0	0.0
M22	0.0	0.0	0.0	N12	2.10	5.37	8.99
M12	-0.05	-0.04	-0.04				
Q1	-0.97	1.67	-0.98				
Q2	0.0	0.0	0.0				
R1	-1.82	2.63	-1.84				
R2	0.0	0.0	0.0				

LOSA 3	0	0.5 L2	L2		0	0.5 L2	L2
W	0.0	0.0	0.0	U1	0.21	0.23	0.30
W,1	0.36	0.57	0.77	U2	0.0	0.0	0.0
W,2	0.0	0.0	0.0	N11	0.0	0.0	0.0
M11	0.0	0.0	0.0	N22	0.0	0.0	0.0
M22	0.0	0.0	0.0	N12	-1.63	3.74	9.29
M12	-0.12	-0.62	-0.12				
Q1	-0.46	0.05	0.51				
Q2	0.0	0.0	0.0				
R1	-0.88	0.05	0.90				
R2	0.0	0.0	0.0				

LOSA 4	0	0.5 L2	L2		0	0.5 L2	L2
W	0.0	0.0	0.0	U1	0.13	0.17	0.21
W,1	0.27	0.30	0.33	U2	0.0	0.0	0.0
W,2	0.0	0.0	0.0	N11	0.0	0.0	0.0
M11	0.0	0.0	0.0	N22	0.0	0.0	0.0
M22	0.0	0.0	0.0	N12	3.25	4.80	6.73
M12	-0.04	-0.04	-0.05				
Q1	0.01	0.01	0.01				
Q2	0.0	0.0	0.0				
R1	0.01	0.00	0.00				
R2	0.0	0.0	0.0				

LOSA 5	0	0.5 L2	L2		0	0.5 L2	L2
W	0.0	0.0	0.0	U1	0.06	0.07	0.09
W,1	0.20	0.22	0.24	U2	0.0	0.0	0.0
W,2	0.0	0.0	0.0	N11	0.0	0.0	0.0
M11	0.0	0.0	0.0	N22	0.0	0.0	0.0
M22	0.0	0.0	0.0	N12	-0.00	0.88	1.93
M12	-0.08	-0.09	-0.10				
Q1	0.02	0.02	0.02				
Q2	0.0	0.0	0.0				
R1	0.02	0.01	0.01				
R2	0.0	0.0	0.0				

LOSA 6	0	0.5 L2	L2		0	0.5 L2	L2
W	0.0	0.0	0.0	U1	-0.55	-0.55	-0.58
W,1	0.81	0.84	0.86	U2	0.0	0.0	0.0
W,2	0.0	0.0	0.0	N11	0.0	0.0	0.0
M11	0.0	0.0	0.0	N22	0.0	0.0	0.0
M22	0.0	0.0	0.0	N12	-2.30	-6.38	-10.55
M12	-0.03	-0.03	-0.03				
Q1	0.04	0.02	0.03				
Q2	0.0	0.0	0.0				
R1	0.05	0.02	0.04				
R2	0.0	0.0	0.0				

LOSA 7	0	0.5 L2	L2		0	0.5 L2	L2
W	0.0	0.0	0.0	U1	-0.17	-0.18	-0.19
W,1	0.27	0.30	0.33	U2	0.0	0.0	0.0
W,2	0.0	0.0	0.0	N11	0.0	0.0	0.0
M11	0.0	0.0	0.0	N22	0.0	0.0	0.0
M22	0.0	0.0	0.0	N12	-4.88	-6.47	-8.10
M12	-0.02	-0.03	-0.03				
Q1	0.01	0.01	0.00				
Q2	0.0	0.0	0.0				
R1	0.01	0.00	0.00				
R2	0.0	0.0	0.0				

VIGA	1	2	3	4	5	6
U1	0.38	-0.12	-0.16	-0.00	-0.05	0.06
U2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
U3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
U3,2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Q1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Q2	0.0	-7.74	6.85	-2.44	0.22	0.0
Q3	0.0	26.19	11.66	14.08	-0.07	0.0
M1	0.0	-10.10	-11.25	-11.36	-9.02	0.0
M2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
M3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
R2	0.0	0.15	-0.46	-0.17	-0.19	0.0
R3	0.0	9.87	8.80	4.51	3.46	0.0

VALORES TOTALES EN LA SECCION 0.25 L1

LOSA 1	0	0.5 L2	L2		0	0.5 L2	L2
W	4.96	5.10	5.26	U1	0.31	0.29	0.28
W,1	0.69	0.70	0.72	U2	-0.01	-0.01	-0.00
W,2	-0.12	-0.12	-0.13	N11	-21.12	-21.08	-21.10
M11	0.42	0.45	0.48	N22	0.67	0.22	-0.00
M22	0.02	0.04	0.00	N12	-8.55	-4.10	-0.00
M12	-0.08	-0.08	-0.08				
Q1	0.09	0.09	0.08				
Q2	0.07	0.00	-0.02				
R1	0.10	0.09	0.07				
R2	0.07	0.03	-0.00				

LOSA 2	0	0.5 L2	L2		0	0.5 L2	L2
W	4.48	4.76	4.78	U1	0.29	0.31	0.35
W,1	0.62	0.63	0.66	U2	-0.01	-0.01	-0.00
W,2	-0.11	-0.11	-0.12	N11	-14.21	-15.45	-17.22
M11	-0.00	0.91	0.00	N22	-2.92	-2.05	-1.52
M22	-1.02	1.31	-1.07	N12	0.16	3.78	7.70
M12	-0.03	-0.03	-0.03				
Q1	0.08	0.17	0.08				
Q2	2.30	-2.96	-2.33				
R1	0.13	0.18	0.12				
R2	2.31	-2.96	-2.34				

LOSA 3	0	0.5 L2	L2		0	0.5 L2	L2
W	1.95	3.13	4.30	U1	0.15	0.17	0.23
W,1	0.26	0.43	0.60	U2	-0.03	-0.02	-0.01
W,2	-0.12	-0.67	-0.11	N11	-12.59	-13.23	-14.51
M11	-0.22	0.29	0.79	N22	-0.27	-0.16	0.82
M22	-2.82	0.06	2.89	N12	-1.16	3.34	9.22
M12	-0.09	-0.51	-0.08				
Q1	-0.40	0.05	0.51				
Q2	1.25	1.22	1.18				
R1	-0.76	0.05	0.88				
R2	1.26	1.25	1.20				

LOSA 4	0	0.5 L2	L2		0	0.5 L2	L2
W	1.47	1.61	1.76	U1	0.09	0.12	0.15
W,1	0.19	0.21	0.23	U2	-0.03	-0.03	-0.02
W,2	-0.10	-0.11	-0.12	N11	-5.60	-7.00	-8.76
M11	0.06	0.06	0.07	N22	0.96	1.47	2.18
M22	-0.00	-0.01	-0.02	N12	2.21	3.34	4.77
M12	-0.03	-0.03	-0.03				
Q1	0.01	0.01	0.01				
Q2	-0.00	-0.00	-0.00				
R1	0.00	0.00	0.00				
R2	-0.00	-0.00	0.00				

LOSA 5	0	0.5 L2	L2		0	0.5 L2	L2
W	1.10	1.21	1.32	U1	0.04	0.05	0.06
W,1	0.14	0.16	0.17	U2	-0.04	-0.04	-0.04
W,2	-0.08	-0.09	-0.10	N11	-3.56	-4.22	-5.11
M11	0.11	0.12	0.13	N22	0.00	0.05	0.22
M22	0.00	-0.02	-0.03	N12	-0.00	0.58	1.29
M12	-0.06	-0.06	-0.07				
Q1	0.01	0.01	0.01				
Q2	-0.01	-0.01	-0.00				
R1	0.01	0.01	0.01				
R2	-0.00	0.00	0.00				

LOSA 6	0	0.5 L2	L2		0	0.5 L2	L2
W	4.48	4.62	4.78	U1	-0.42	-0.41	-0.44
W,1	0.62	0.64	0.66	U2	-0.14	-0.14	-0.15
W,2	-0.11	-0.11	-0.12	N11	18.88	19.51	19.60
M11	0.11	0.11	0.11	N22	3.18	2.11	1.64
M22	0.04	0.01	0.00	N12	0.16	-4.65	-9.54
M12	-0.02	-0.02	-0.02				
Q1	0.02	0.02	0.02				
Q2	-0.03	-0.01	0.01				
R1	0.02	0.02	0.01				
R2	-0.03	-0.01	0.01				

LOSA 7	0	0.5 L2	L2		0	0.5 L2	L2
W	1.47	1.61	1.76	U1	-0.12	-0.13	-0.14
W,1	0.19	0.21	0.23	U2	-0.15	-0.16	-0.17
W,2	-0.10	-0.11	-0.12	N11	6.40	6.46	6.88
M11	0.04	0.04	0.04	N22	-0.69	-1.37	-2.25
M22	-0.00	-0.01	-0.02	N12	-3.56	-4.71	-5.92
M12	-0.02	-0.02	-0.02				
Q1	0.00	0.00	0.00				
Q2	-0.00	-0.00	-0.00				
R1	0.00	0.00	0.00				
R2	-0.00	-0.00	0.00				

VIGA	1	2	3	4	5	6
U1	0.28	-0.09	-0.12	-0.00	-0.04	0.04
U2	-0.00	-0.08	-0.08	-0.10	-0.10	-0.04
U3	5.26	4.86	4.39	1.85	1.40	1.16
U3,2	-0.13	-0.12	-0.11	-0.12	-0.10	-0.08
Q1	0.0	40.31	55.06	1.01	19.54	0.0
Q2	0.0	-8.55	7.77	-1.92	-0.08	0.0
Q3	0.0	24.55	14.01	10.24	-0.04	0.0
M1	0.0	-7.92	-7.40	-8.12	-6.41	0.0
M2	0.0	-55.94	-49.79	-24.78	-18.85	0.0
M3	0.0	-0.89	-0.86	-1.09	-1.10	0.0
R2	0.0	-0.41	0.15	-0.19	-0.19	0.0
R3	0.0	9.55	8.63	3.36	2.91	0.0

VALORES TOTALES EN LA SECCION 0.50 L1

LOSA 1	0	0.5 L2	L2		0	0.5 L2	L2
W	7.25	7.41	7.60	U1	0.00	0.00	0.00
W,1	0.00	0.00	0.00	U2	-0.04	-0.02	-0.01
W,2	-0.12	-0.15	-0.17	N11	-43.59	-38.01	-37.20
M11	0.83	0.81	0.81	N22	5.80	1.43	-0.00
M22	-0.09	0.00	0.00	N12	0.00	0.00	-0.00
M12	-0.00	-0.00	-0.00				
Q1	-0.00	0.00	0.00				
Q2	0.11	0.01	-0.01				
R1	0.00	0.00	0.00				
R2	0.03	0.01	-0.00				

LOSA 2	0	0.5 L2	L2		0	0.5 L2	L2
W	6.65	8.38	7.08	U1	0.00	0.00	0.00
W,1	0.00	-0.00	0.00	U2	0.01	-0.01	-0.03
W,2	-0.21	-0.16	-0.12	N11	-36.13	-31.60	-40.48
M11	-1.37	3.87	-1.36	N22	-10.50	-11.52	-8.74
M22	-11.55	12.37	-11.60	N12	0.00	0.00	0.00
M12	0.00	-0.00	-0.00				
Q1	0.00	-0.00	0.00				
Q2	19.64	-20.85	-19.66				
R1	0.00	-0.00	0.00				
R2	19.68	-20.84	-19.70				

LOSA 3	0	0.5 L2	L2		0	0.5 L2	L2
W	2.77	4.52	6.32	U1	0.00	0.00	0.00
W,1	0.00	0.00	0.00	U2	-0.04	-0.03	-0.01
W,2	-0.18	-1.01	-0.22	N11	-18.58	-21.87	-33.29
M11	-0.35	0.49	1.38	N22	-0.86	0.25	6.98
M22	-4.25	0.04	4.21	N12	-0.00	0.00	-0.00
M12	-0.00	-0.00	0.00				
Q1	-0.00	0.00	0.00				
Q2	1.92	1.83	1.82				
R1	-0.00	0.00	0.00				
R2	1.94	1.93	1.92				

LOSA 4	0	0.5 L2	L2		0	0.5 L2	L2
W	2.08	2.28	2.50	U1	0.00	0.00	0.00
W,1	0.00	0.00	0.00	U2	-0.05	-0.04	-0.03
W,2	-0.14	-0.16	-0.18	N11	-8.03	-10.04	-12.69
M11	0.08	0.09	0.10	N22	1.24	1.92	2.93
M22	-0.01	-0.02	-0.03	N12	0.00	0.00	0.00
M12	-0.00	-0.00	-0.00				
Q1	0.00	0.00	0.00				
Q2	-0.00	-0.00	-0.00				
R1	0.00	0.00	-0.00				
R2	0.00	0.00	0.01				

LOSA 5	0	0.5 L2	L2		0	0.5 L2	L2
W	1.56	1.71	1.87	U1	0.00	0.00	0.00
W,1	0.00	0.00	0.00	U2	-0.06	-0.06	-0.06
W,2	-0.12	-0.13	-0.14	N11	-4.85	-5.87	-7.16
M11	0.16	0.17	0.19	N22	0.00	0.06	0.25
M22	0.00	-0.02	-0.05	N12	-0.00	0.00	0.00
M12	-0.00	-0.00	-0.00				
Q1	0.00	0.00	0.00				
Q2	-0.01	-0.01	-0.01				
R1	0.00	0.00	0.00				
R2	-0.00	0.00	0.01				

LOSA 6	0	0.5 L2	L2		0	0.5 L2	L2
W	6.64	6.89	7.08	U1	-0.00	-0.00	-0.00
W,1	0.00	0.00	0.00	U2	-0.25	-0.20	-0.16
W,2	-0.22	-0.16	-0.12	N11	41.00	35.33	42.19
M11	0.27	0.27	0.27	N22	18.50	18.43	16.09
M22	0.16	0.08	0.12	N12	-0.00	-0.00	-0.00
M12	0.00	-0.00	-0.00				
Q1	-0.00	-0.00	-0.00				
Q2	-0.10	-0.01	0.03				
R1	-0.00	-0.00	-0.00				
R2	-0.07	-0.01	0.06				

LOSA 7	0	0.5 L2	L2		0	0.5 L2	L2
W	2.08	2.28	2.50	U1	-0.00	-0.00	-0.00
W,1	0.00	0.00	0.00	U2	-0.21	-0.22	-0.24
W,2	-0.14	-0.16	-0.18	N11	9.09	9.23	9.89
M11	0.05	0.06	0.06	N22	-1.06	-2.12	-3.49
M22	-0.01	-0.01	-0.02	N12	-0.00	-0.00	-0.00
M12	-0.00	-0.00	-0.00				
Q1	0.00	0.00	0.00				
Q2	-0.00	-0.00	-0.00				
R1	0.00	0.00	-0.00				
R2	0.00	0.00	0.00				

VIGA	1	2	3	4	5	6
U1	0.00	-0.00	-0.00	-0.00	-0.00	0.00
U2	-0.01	-0.10	-0.14	-0.15	-0.14	-0.04
U3	7.60	7.16	6.49	2.62	1.98	1.54
U3,2	-0.17	-0.12	-0.22	-0.18	-0.14	-0.12
Q1	0.0	80.20	102.38	0.47	28.09	0.0
Q2	0.0	-0.00	0.00	-0.00	0.00	0.0
Q3	0.0	-0.00	-0.00	0.00	-0.00	0.0
M1	0.0	-0.00	0.00	-0.00	-0.00	0.0
M2	0.0	-121.05	-111.93	-35.81	-26.87	0.0
M3	0.0	1.36	-4.36	-1.79	-1.70	0.0
R2	0.0	-0.00	0.00	-0.00	-0.00	0.0
R3	0.0	-0.00	-0.00	0.00	0.00	0.0

VALORES TOTALES EN LA SECCION 0.75 L1

LOSA 1	0	0.5 L2	L2		0	0.5 L2	L2
W	4.96	5.10	5.26	U1	-0.31	-0.29	-0.28
W,1	-0.69	-0.70	-0.72	U2	-0.01	-0.01	-0.00
W,2	-0.12	-0.12	-0.13	N11	-21.12	-21.08	-21.10
M11	0.42	0.45	0.48	N22	0.67	0.22	-0.00
M22	0.02	0.04	0.00	N12	8.55	4.10	0.00
M12	0.08	0.08	0.08				
Q1	-0.09	-0.09	-0.08				
Q2	0.07	0.00	-0.02				
R1	-0.10	-0.09	-0.07				
R2	0.07	0.03	-0.00				

LOSA 2	0	0.5 L2	L2		0	0.5 L2	L2
W	4.48	4.76	4.78	U1	-0.29	-0.31	-0.35
W,1	-0.62	-0.63	-0.66	U2	-0.01	-0.01	-0.00
W,2	-0.11	-0.11	-0.12	N11	-14.21	-15.45	-17.22
M11	-0.00	0.91	0.00	N22	-2.92	-2.05	-1.52
M22	-1.02	1.31	-1.07	N12	-0.16	-3.78	-7.70
M12	0.03	0.03	0.03				
Q1	-0.08	-0.17	-0.08				
Q2	2.30	-2.96	-2.33				
R1	-0.13	-0.18	-0.12				
R2	2.31	-2.96	-2.34				

LOSA 3	0	0.5 L2	L2		0	0.5 L2	L2
W	1.95	3.13	4.30	U1	-0.15	-0.17	-0.23
W,1	-0.26	-0.43	-0.60	U2	-0.03	-0.02	-0.01
W,2	-0.12	-0.67	-0.11	N11	-12.59	-13.23	-14.51
M11	-0.22	0.29	0.79	N22	-0.27	-0.16	0.82
M22	-2.82	0.06	2.89	N12	1.16	-3.34	-9.22
M12	0.09	0.51	0.08				
Q1	0.40	-0.05	-0.51				
Q2	1.25	1.22	1.18				
R1	0.76	-0.05	-0.88				
R2	1.26	1.25	1.20				

LOSA 4	0	0.5 L2	L2		0	0.5 L2	L2
W	1.47	1.61	1.76	U1	-0.09	-0.12	-0.15
W,1	-0.19	-0.21	-0.23	U2	-0.03	-0.03	-0.02
W,2	-0.10	-0.11	-0.12	N11	-5.60	-7.00	-8.76
M11	0.06	0.06	0.07	N22	0.96	1.47	2.18
M22	-0.00	-0.01	-0.02	N12	-2.21	-3.34	-4.77
M12	0.03	0.03	0.03				
Q1	-0.01	-0.01	-0.01				
Q2	-0.00	-0.00	-0.00				
R1	-0.00	-0.00	-0.00				
R2	-0.00	-0.00	0.00				

LOSA 5	0	0.5 L2	L2		0	0.5 L2	L2
W	1.10	1.21	1.32	U1	-0.04	-0.05	-0.06
W,1	-0.14	-0.16	-0.17	U2	-0.04	-0.04	-0.04
W,2	-0.08	-0.09	-0.10	N11	-3.56	-4.22	-5.11
M11	0.11	0.12	0.13	N22	0.00	0.05	0.22
M22	0.00	-0.02	-0.03	N12	0.00	-0.58	-1.29
M12	0.06	0.06	0.07				
Q1	-0.01	-0.01	-0.01				
Q2	-0.01	-0.01	-0.00				
R1	-0.01	-0.01	-0.01				
R2	-0.00	0.00	0.00				

LOSA 6	0	0.5 L2	L2		0	0.5 L2	L2
W	4.48	4.62	4.78	U1	0.42	0.41	0.44
W,1	-0.62	-0.64	-0.66	U2	-0.14	-0.14	-0.15
W,2	-0.11	-0.11	-0.12	N11	18.88	19.51	19.60
M11	0.11	0.11	0.11	N22	3.18	2.11	1.64
M22	0.04	0.01	0.00	N12	-0.16	4.65	9.54
M12	0.02	0.02	0.02				
Q1	-0.02	-0.02	-0.02				
Q2	-0.03	-0.01	0.01				
R1	-0.02	-0.02	-0.01				
R2	-0.03	-0.01	0.01				

LOSA 7	0	0.5 L2	L2		0	0.5 L2	L2
W	1.47	1.61	1.76	U1	0.12	0.13	0.14
W,1	-0.19	-0.21	-0.23	U2	-0.15	-0.16	-0.17
W,2	-0.10	-0.11	-0.12	N11	6.40	6.46	6.88
M11	0.04	0.04	0.04	N22	-0.69	-1.37	-2.25
M22	-0.00	-0.01	-0.02	N12	3.56	4.71	5.92
M12	0.02	0.02	0.02				
Q1	-0.00	-0.00	-0.00				
Q2	-0.00	-0.00	-0.00				
R1	-0.00	-0.00	-0.00				
R2	-0.00	-0.00	0.00				

VIGA	1	2	3	4	5	6
U1	-0.28	0.09	0.12	0.00	0.04	0.04
U2	-0.00	-0.08	-0.08	-0.10	-0.10	0.04
U3	5.26	4.86	4.39	1.85	1.40	1.00
U3,2	-0.13	-0.12	-0.11	-0.12	-0.10	-0.08
Q1	0.0	40.31	55.06	1.01	19.54	0.0
Q2	0.0	8.55	-7.77	1.92	0.08	0.0
Q3	0.0	-24.55	-14.01	-10.24	0.04	0.0
M1	0.0	7.92	7.40	8.12	6.41	0.0
M2	0.0	-55.94	-49.79	-24.78	-18.84	0.0
M3	0.0	-0.89	-0.86	-1.09	-1.10	0.0
R2	0.0	0.41	-0.15	0.19	0.17	0.0
R3	0.0	-9.55	-8.63	-3.36	2.51	0.0

VALORES TOTALES EN LA SECCION 1.00 L1

LOSA 1	0	0.5 L2	L2		0	0.5 L2	L2
W	0.00	0.00	0.00	U1	-0.41	-0.38	-0.38
W,1	-0.90	-0.92	-0.95	U2	-0.00	-0.00	-0.00
W,2	-0.00	-0.00	-0.00	N11	-0.00	-0.00	-0.00
M11	0.00	0.00	0.00	N22	0.00	0.00	-0.00
M22	-0.00	0.00	0.00	N12	8.48	4.27	0.00
M12	0.11	0.12	0.13				
Q1	-0.02	-0.06	-0.06				
Q2	0.00	0.00	-0.00				
R1	0.02	-0.05	-0.05				
R2	0.00	0.00	-0.00				

LOSA 2	0	0.5 L2	L2		0	0.5 L2	L2
W	0.00	0.00	0.00	U1	-0.38	-0.40	-0.45
W,1	-0.81	-0.96	-0.86	U2	0.00	-0.00	-0.00
W,2	-0.00	-0.00	-0.00	N11	-0.00	-0.00	-0.00
M11	-0.00	0.00	-0.00	N22	-0.00	-0.00	-0.00
M22	-0.00	0.00	-0.00	N12	-2.10	-5.37	-8.99
M12	0.05	0.04	0.04				
Q1	0.97	-1.67	0.98				
Q2	0.00	-0.00	-0.00				
R1	1.82	-2.63	1.84				
R2	0.00	-0.00	-0.00				

LOSA 3	0	0.5 L2	L2		0	0.5 L2	L2
W	0.00	0.00	0.00	U1	-0.21	-0.23	-0.30
W,1	-0.36	-0.57	-0.77	U2	-0.00	-0.00	-0.00
W,2	-0.00	-0.00	-0.00	N11	-0.00	-0.00	-0.00
M11	-0.00	0.00	0.00	N22	0.00	0.00	0.00
M22	-0.00	0.00	0.00	N12	1.63	-3.74	-9.29
M12	0.12	0.62	0.12				
Q1	0.46	-0.05	-0.51				
Q2	0.00	0.00	0.00				
R1	0.88	-0.05	-0.90				
R2	0.00	0.00	0.00				

LOSA 4	0	0.5 L2	L2		0	0.5 L2	L2
W	0.00	0.00	0.00	U1	-0.13	-0.17	-0.21
W,1	-0.27	-0.30	-0.33	U2	-0.00	-0.00	-0.00
W,2	-0.00	-0.00	-0.00	N11	-0.00	-0.00	-0.00
M11	0.00	0.00	0.00	N22	0.00	0.00	0.00
M22	0.00	-0.00	-0.00	N12	-3.25	-4.80	-6.73
M12	0.04	0.04	0.05				
Q1	-0.01	-0.01	-0.01				
Q2	-0.00	-0.00	-0.00				
R1	-0.01	-0.00	-0.00				
R2	-0.00	-0.00	-0.00				

LOSA 5	0	0.5 L2	L2		0	0.5 L2	L2
W	0.00	0.00	0.00	U1	-0.06	-0.07	-0.09
W,1	-0.20	-0.22	-0.24	U2	-0.00	-0.00	-0.00
W,2	-0.00	-0.00	-0.00	N11	-0.00	-0.00	-0.00
M11	0.00	0.00	0.00	N22	0.00	0.00	0.00
M22	0.00	-0.00	-0.00	N12	0.00	-0.88	-1.93
M12	0.08	0.09	0.10				
Q1	-0.02	-0.02	-0.02				
Q2	-0.00	-0.00	-0.00				
R1	-0.02	-0.01	-0.01				
R2	-0.00	0.00	0.00				

LOSA 6	0	0.5 L2	L2		0	0.5 L2	L2
W	0.00	0.00	0.00	U1	0.55	0.55	0.58
W,1	-0.81	-0.84	-0.86	U2	-0.00	-0.00	-0.00
W,2	-0.00	-0.00	-0.00	N11	0.00	0.00	0.00
M11	0.00	0.00	0.00	N22	0.00	0.00	0.00
M22	0.00	0.00	0.00	N12	2.30	6.38	10.55
M12	0.03	0.03	0.03				
Q1	-0.04	-0.02	-0.03				
Q2	-0.00	-0.00	0.00				
R1	-0.05	-0.02	-0.04				
R2	-0.00	-0.00	0.00				

LOSA 7	0	0.5 L2	L2		0	0.5 L2	L2
W	0.00	0.00	0.00	U1	0.17	0.18	0.19
W,1	-0.27	-0.30	-0.33	U2	-0.00	-0.00	-0.00
W,2	-0.00	-0.00	-0.00	N11	0.00	0.00	0.00
M11	0.00	0.00	0.00	N22	-0.00	-0.00	-0.00
M22	0.00	-0.00	-0.00	N12	4.88	6.47	8.10
M12	0.02	0.03	0.03				
Q1	-0.01	-0.01	-0.00				
Q2	-0.00	-0.00	-0.00				
R1	-0.01	-0.00	-0.00				
R2	-0.00	-0.00	-0.00				

VIGA	1	2	3	4	5	6
U1	-0.38	0.12	0.16	0.00	0.05	-0.06
U2	-0.00	-0.00	-0.00	-0.00	-0.00	-0.00
U3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
U3,2	-0.00	-0.00	-0.00	-0.00	-0.00	-0.00
Q1	0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.0
Q2	0.0	7.74	-6.85	2.44	-0.22	0.0
Q3	0.0	-26.19	-11.66	-14.08	0.07	0.0
M1	0.0	10.10	11.25	11.36	9.02	0.0
M2	0.0	-0.00	-0.00	-0.00	-0.00	0.0
M3	0.0	0.00	-0.00	-0.00	-0.00	0.0
R2	0.0	-0.15	0.46	0.17	0.19	0.0
R3	0.0	-9.87	-8.80	-4.51	-3.46	0.0

RECONOCIMIENTOS.

Deseo expresar mi agradecimiento a mi compañero D. Jesús Martínez González, Dr. Ingeniero de Caminos, por la realización del programa en FORTRAN IV del método de la matriz de rigidez aplicado a este tipo de estructuras de puentes. A mi colega en el Imperial College, de Londres, Mr. K. C. Michael por las valiosas sugerencias recibidas en conversaciones y en su excelente artículo (IV), cuyas ideas fundamentales he seguido, aunque el proceso matricial desarrollado ha sido completamente diferente.

NOTACION

LOSA:

x_1, x_2, z	Ejes de un triedro trirrectángulo.
u_1, u_2, w	Desplazamientos de un punto genérico.
l_1, l_2	Longitudes.
h	Espesor.
$D = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)}$	
$n_{ij} (i, j = 1, 2)$	Esfuerzo tangencial de dirección j actuando sobre la cara i .
$m_{ij} (i, j = 1, 2)$	Momento actuando sobre la cara i y que produce tensiones en la dirección j .
$q_i (i = 1, 2)$	Esfuerzo cortante actuando en la cara i , dirección Z .
$r_i (i = 1, 2)$	Esfuerzos cortantes de Kirchhoff.
$\phi_a \phi$	Función de tensión.
E	Módulo de Young.
ν	Coefficiente de Poisson.
X_1, X_2, Z	Fuerzas exteriores actuando sobre un punto genérico.
$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$	(Operador de Laplace.)

VIGA:

$y'_1 y'_2 y'_3$	Ejes de un triedro trirrectangular.
l_1	Longitud de la viga.
A	Área de su sección transversal.
I_1, I_2	Momentos de inercia.
J	Momento de torsión.
E_v	Módulo de Young.
ν_v	Coefficiente de Poisson.
F_1, F_2, F_3	Fuerzas exteriores actuando sobre un punto genérico.
G_1, G_2, G_3	Pares exteriores actuando sobre un punto genérico.

SUBÍNDICES Y SUPERÍNDICES:

i	Se refiere a la solución inicial.
c	Se refiere a la solución complementaria.
o	Se refiere a la solución particular.
f	Se refiere a la solución de flexión o de la placa.
m	Se refiere a la solución de membrana o de la laja.
0 y 1	Se refiere respectivamente al extremo dorsal y frontal de un elemento.
p	Vector de condiciones estáticas o de fuerzas.
d	Vector de condiciones cinemáticas o de desplazamientos.
$, i$	Derivada respecto a la variable x_i (y'_i) ($i = 1, 2$).

Las letras mayúsculas en desplazamientos y esfuerzos se refieren a estos valores respecto a los ejes generales o de viga.

BIBLIOGRAFIA

- (I) LIVESLEY, R. K.: *Matrix methods of structural analysis*. Pergamon Press Ltd.
- (II) TOTTENHAN, H.: "A further note on approximate solution to shell problems". Timber Research and Development Association. *Research Report*, E/RR/4, 1958.
- (III) SAMARTÍN, A.: "Placa ortótropa rectangular". *Revista de Obras Públicas*, junio 1967.
- (IV) MARSH, J. G., HONDROS, G. y MICHAEL, K. C.: *Stiffness analysis of interconnected T-Beam bridge systems by digital computer*. Proceedings of the second Conference of Australian Road Research Board, 1964.
- (V) JENKINS, R. S.: *Theory and design of cylindrical shell*. Ove Arup and Partners.
- (VI) POWEL, G. H.: "Interaction of edge beams with doubly curved shells". *Journal of the Structural Division*, A.S.C.E., June 1966.

RESUMEN

Se presenta un análisis estructural de tableros de puentes de sección constante y simplemente apoyados, compuestos de vigas y losas arbitrariamente conectadas.

El estudio se realiza para el caso general de carga vertical puntual actuando en un punto genérico del tablero.

Se determinan las matrices de rigidez de las vigas y losas, considerando en estas últimas sus dos tipos de esfuerzos, es decir, los esfuerzos laja y placa. En la deducción de la matriz de rigidez de todo el tablero, se utiliza la técnica *standard* de la teoría de los métodos matriciales en el cálculo de estructuras.

El método de la matriz de transferencia y uno iterativo, análogo al método de H. Cross para entramados planos, son también expuestos.

Se resuelve, finalmente, un ejemplo de aplicación mediante un ordenador electrónico.

RÉSUMÉ

On presente ici une analyse structurale des panneaux de ponts à sections constantes simplement appuyés, composés par des poutres et des dalles arbitrairement connectées.

L'étude est réalisée pour le cas général de charge verticale ponctuelle agissant sur un point générique du panneau.

Les matrices de rigidité des poutres et des dalles sont déterminées, et pour les dernières on considère leurs deux sorts d'efforts, c'est à dire, celui de flexion et le tangentiel.

La technique standard des méthodes des matrices dans l'analyse structurale est utilisée pendant le processus pour déterminer la matrice de rigidité de toute l'estructure des panneaux.

La méthode de la matrice de transference aussi bien qu'une autre itérative, analogue à celle de H. Cross pour des chevonnages plans, sont ici exposées.

Finalement, un exemple d'application est résolu au moyen d'un ordinateur électronique.

SUMMARY

A structural analysis of constant cross and simply supported bridge decks, composed of beams and plates arbitrarily connected, is presented.

This work is intended for the general case of vertical point load acting in an arbitrary point of the bridge deck.

The stiffness-matrix of the beam and plate are determined, and for the latter, the flexural and tangential stress-resultants are considered.

The standard technique of the matrix methods in the structural analysis is used during the process of determining the stiffness-matrix of the whole structure of the bridge deck.

The method of transfer matrix and an iterative one, which is similar to the method of H. Cross of plane rigid-joints structures are also shown.

Finally, an example is solved by means of a digital computer.

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird eine strukturelle Analyse der von konstantem Querschnitt und einfach gestützten Brückenbühnen welche mittels willkürlich verbundenen Balken und Platten zusammengesetzt sind.

Die Methode ist für den allgemeinen Fall von senkrecht, auf einem Punkt der Bühne einwirkenden Last gültig.

Die Steifheitsmatritzen der Balken und Platten werden ermittelt und in dem letzten Falle die Scheiben- und Plattenbeanspruchungen berücksichtigt werden.

Bei Ermittlung der Steifheitsmatritze der ganzen Bühne wird die Standardtechnik der auf dem Gebiete der Strukturberechnung üblichen Theorie von Matritzenmethode verwendet.

Der Verfasser befasst sich auch mit der Übertragungsmatrixmethode und mit dem iterativen System das ähnlich demjenigen von H. Cross für flächen Bindwerke ist.

Endlich wird ein praktisches Beispiel mittels eines elektronischen Ordners besprochen.